Бахарев Рэм

Учебник по олимпиадной экономике для школьников

Версия от 12.05.2024

Содержание

Вступление и общая информация о подготовке к олимпиадам по экономике 4

Обозначения и определения 7

Математический аппарат 10

Тангенс 10

Функции 10

Прогрессии 15

Производная 16

Оптимизация функций 22

Теория потребителя и Полезность 34

Классическая максимизация полезности 34

Максимизация полезности с комплектами 42

Дискретная максимизация полезности 45

Вывод функции предложения труда индивида 46

Теория производителя и процесс производства 48

Факторы производства и производственная функция 48

Структура издержек фирмы 50

Вывод функции издержек 52

Оптимизация на нескольких заводах 58

Общая теория издержек 64

Отдача от масштаба и Эффект масштаба 69

Рыночные структуры 72

Совершенная конкуренция 75

Общая теория фирмы 75

Рынок совершенной конкуренции 87

Международная торговля 92

Монополия 99

Классическая оптимизация фирмы 99

Дискриминация 103

Олигополия 119

Модель Курно 119

Модель Штаккельберга 121

Модель Бертрана 122

Модель Форхаймера (Модель Ценового Лидера) 127

Модель Хотеллинга 128

Государственное вмешательство и общественное благосостояние 131

Общественное благосостояние 131

Налоги и субсидии 134

Пол и потолок цен 155

Квоты 164

Косвенное государственное вмешательство 165

Внешние эффекты 166

Рынок труда 177

Базовая оптимизация фирмы на рынке труда 177

Предельные функции на рынке труда 178

Дискриминация на рынке труда 180

Эластичность 184

Формулы эластичности 184

Геометрический смысл эластичности для линейных функций 187

Интересные факты про эластичность 191

Эластичность в теории потребителя и классификация товаров 194

Альтернативные издержки и КПВ 197

Построение КПВ 200

Сложение КПВ 204

Торговля в КПВ 214

Неравенство 225

Кривая Лоренца и коэффициент Джини 225

Подсчет коэффициента Джини 227

Построение кривой Лоренца для определенной группы 230

Сложение кривых Лоренца 231

Финансы 236

Дисконтирование денежных потоков и приведенная стоимость 236

Банки, ставки, кредиты, депозиты 237

Ценные бумаги 239

Макроэкономика 246

Основные понятия макроэкономики 246

Уравнение ВВП по расходам, связанные с ним тождества и мультипликация ВВП 251

Монетарная политика 256

Модель IS-LM 262

Модель AD-AS 268

Вступление и общая информация о подготовке к олимпиадам по экономике

ВНИМАНИЕ! Данный раздел является самым важным в этом учебнике. Здесь не будет каких-то общих слов, а только полезная сконцентрированная информация. Настоятельно советую прочитать вступление до конца.

Обо мне

Меня зовут Бахарев Рэм. Я являюсь победителем Заключительного этапа Всероссийской Олимпиады Школьников по Экономике 2016 года, а также выпускником программы совместного бакалавриата РЭШ и ВШЭ.

Уже 8 лет я профессионально занимаюсь подготовкой школьников к олимпиадам по экономике в качестве репетитора и преподавателя в школах Москвы, Подмосковья, в выездных школах, региональных сборах и на различных коммерческих курсах, а также работал в жюри муниципального и регионального этапов ВсОШ Москвы и Московской области.

Я постоянно нахожусь в контакте с людьми и образовательными площадками, напрямую связанными с проведением олимпиад и подготовкой к ним. Поэтому, если есть какие-либо вопросы, связанные с процессом подготовки к олимпиадам по экономике, занятий со мной или моими коллегами, а также по поводу данного учебника, вы всегда можете связаться со мной в Telegram. Прошу писать, а не звонить, так как на звонки я не отвечаю. Контакты для связи:

+7(915)4834134 - Для связи через Telegram (по нику: @remzaza)

Об учебнике

Данный учебник является бесплатным и свободно распространяемым носителем информации. При использовании материалов в целях проведения образовательных программ ссылка на первоисточник является обязательным условием.

Учебник по своей сути является пособием по решению большинства олимпиадных задач по экономике. Здесь вы сможете найти практически полное собрание теории по олимпиадной экономике, иллюстрированной примерами решения различных задач. Данный учебник пока еще находится в разработке, поэтому он будет постоянно пополняться новыми разделами и новой теорией. В настоящий момент здесь содержится вся базовая теория по **Микроэкономике** и большая часть базовой теории по **Макроэкономике**. В дальнейшем здесь будет появляться продвинутая теория. Также, учебник сейчас находится в бета-разработке, то есть в нем могут присутствовать арифметические и орфографичекие опечатки, а также некоторые неточности. Если вы заметите какую-либо ошибку, сразу же напишите мне, чтобы я исправил ее в будущих версиях. Конечно, я мог бы выпустить учебник уже без случайных опечаток, но на это потребовалось бы значительное время, а готовиться пора начинать уже сейчас. Не забывайте всегда иметь при себе актуальную версию учебника. Она всегда будет размещена в официальной группе Вконтакте https://vk.com/econbook.

Хочу заметить, что некоторые темы довольно сложно объяснить словами или графиками, так что советую читать учебник очень вдумчиво и медленно. Если, по-вашему, объяснения оказываются совершенно непонятными, можете написать мне и я подумаю над тем, как сделать данный материал более доступным.

Некоторые темы в учебнике будут отмечены бежевым цветом. Это значит, что они либо очень сложные, либо не особо сложные, но слишком продвинутые и для их понимания потребуется хорошее знание экономики. Крайне не советую изучать эти темы тем, кто впервые начал изучать олимпадную экономику.

По поводу места данного учебника в подготовке к олимпиадам

Процесс подготовки к олимпиадам всегда состоит из двух частей: изучение теории и решение задач с последующим их разбором. Вторая часть подготовки, а именно нарешивание задач и их проверка компетентными преподавателями, является самой важной частью процесса подготовки. Цель данного учебника - дать вам всю теорию решения данных задач, но практика всегда была, есть и будет важнее. Советую рассматривать данный учебник не как единственное средство подготовки к олимпиадам, а дополнение к вашей основной подготовке.

Олимпиады по экономике

Олимпиады в России делятся на две важные части. Первая часть - это перечневые олимпиады. Такие олимпиады дают льготы при поступлении в вузы. Некоторые дают автоматическое поступление без ДВИ, некоторые - 100 баллов ЕГЭ по предмету олимпиады. Следите за перечнем Олимпиад, который выпускается осенью каждого года, и не пропускайте отборочные этапы!

Второй вид олимпиады - это Всероссийская Олимпиада Школьников (ВсОШ, в простонародье Всерос). Победа или призерство на заключительном этапе данной олимпиады дает гарантированное поступление на бюджет в любой вуз страны по профилю олимпиады. Заключительный этап Всероса - это то, к чему стоит стремиться при подготовке. Для этого вам придется пройти школьный, муниципальный и региональный этапы.

Очень важно понимать, что олимпиадная экономика - это точная наука. Большими преимуществами для вас будут хорошая математическая подготовка или опыт участия в математических олимпиадах.

Начинать подготовку к олимпиадной экономике советую как можно раньше. Идеальный вариант - с начала 9 класса. В таком случае у вас будет достаточно времени, чтобы постараться завоевать пъедестал уже в 9 классе или иметь очень хорошую подготовку к 11. Начинать заниматься с начала 10 класса тоже довольно здравая идея: при приложении должных усилий подготовиться к заключительным этапам олимпиад, которые проходят весной, вполне реально, а тем более реально будет победить уже весной 11 класса. Начинать готовиться в 11 классе уже немного опасно. С одной стороны, у вас будет преимущество засчет хорошего матаппарата, а с другой - давление неопределенности, ведь это последний класс, и если не олимпиада, то ЕГЭ. Совмещать подготовку и к олимпиаде, и к ЕГЭ довольно трудозатратно, но все же осуществимо. Если вы планируете готовиться к олимпиадам по экономике с 11 класса, вы должны понимать, что вам придется уделять этому довольно много времени.

Так как готовиться-то???

Как я говорил ранее, учебником сыт не будешь - нужно как можно больше практики. В большинстве школ нет такого предмета, как экономика, а экономика в обществознании не имеет ничего общего с олимпиадной. Самый популярный способ подготовки - это занятия с репетитором, которые дадут вам и более точную теорию, и море практики. Но, помимо индивидуальных занятий, существуют и другие способы подготовки.

Один из лучших форматов подготовки после репетитора – выездные школы, которые проводятся обычно 4 раза в год: летом и перед каждый этапом ВсОШ. Найти различные школы довольно просто, а формат выездной школы в принципе довольно хорош для подготовки: там вас ждет непрекращающийся с утра до вечера процесс обучения, очень много задач и хорошая атмосфера, благодаря которой я в свое время очень сильно полюбил олимпиадную экономику.

Также существуют различные курсы по олимпиадной экономике. Занятия на них не такие интенсивные, зато проводятся они круглогодично, то есть можно заниматься без отрыва от школы/ чего то другого.

У меня есть свой бесплатный проект: телеграм-канал, в котором я выкладываю множество различных материалов по подготовке к олимпиадам. Доступ в канал является абсолютно бесплатным, так что максимально советую подписаться. Также я публикую там различные советы для подготовки и анонсы разных событий с моим участием. Ссылка: t.me/econbook.

Также, я уже несколько лет преподаю в школе Олмат, веду там выездные школы в качестве главного преподавателя продвинутых групп и веду различные онлайн курсы. Приложу ссылку на главный телеграмм-канал Школы: https://t.me/oleconomics.

В принципе, на этой ноте пора заканчивать со вступлением и переходить к тому, ради чего вы скачали этот учебник: к олимпиадной экономике!

Обозначения и определения

Здесь мы посмотрим на общепринятые обозначения, которые используютсяв экономике, присутствуют в официальных критериях и использование которых существенно упростит вам жизнь. Я дополнительно приведу небольшие пояснения к этим обозначениям.

Если вы новички в олимпиадной экономике, советую выписать данные обозначения, или распечатать их, потому что я буду повсеместно использовать их в данном учебнике. Однако, вы все равно можете пропустить этот раздел и учить обозначения по ходу дела.

Микроэкономика

C – издержки ($Costs$)
P – продукт ($Product$)
R – выручка ($Revenue$)
Π – прибыль

T – общая функция ($Total$)
A – средняя функция ($Average$)
M – предельная функция ($Marginal$)

F – фиксированная функция ($Fixed$, обычно применяется с издержками)
V – переменная функция ($Variable$, обычно применяется с издержками)

Например, AFC - средние фиксированные издержки, а $M\Pi$ - предельная прибыль.

U – полезность ($Utility$)
I – доход, количество доступных денег ($Income$)
P – цена ($Price$)
Q – количество ($Quantity$)
L – количество труда ($Labor$)
MRP_L – предельная выручка с единицы труда
MC_L – предельные затраты на единицу труда
K – количество капитала
E_P^Q – эластичность количества по цене
$E_I^{Q_d}$ – эластичность спроса по доходу
OC_x – альтернативных издержки товара x
t – ставка налога (tax)
T_x – общие налоговые сборы ($Taxes$)
s – ставка субсидии ($subsidy$)
S – общая величина субсидии ($Subsidy$)
Q_d – величина спроса ($Demand$)
Q_s – величина предложения ($Supply$)
P_d – цена покупателя
P_s – цена производителя
CS – излишек потребителя ($Consumer\ Surplus$)
PS – излишек производителя ($Productor\ Surplus$)

GS – излишек государства ($Government\ Surplus$)
ES – внешний излишек ($External\ Surplus$)
EC – внешние затраты ($External\ Costs$)
LR – долгосрочный период ($Long\ Run$)
SR – краткосрочный период ($Short\ Run$)
G – коэффициент Джини
i – номинальная ставка процента
r – реальная ставка процента (в финансах – просто ставка процента)
irr – внутренняя норма доходности ($internal\ rate\ of\ return$)
r_e – эффективная ставка процента
PV – приведенная стоимость денег ($Present\ Value$)
NPV – общая приведенная стоимость проекта ($Net\ Present\ Value$)

Макроэкономика

Y – ВВП
Y^* – потенциальный ВВП
Y_n – номинальный ВВП ($nominal$)
Y_r – реальный ВВП ($real$)
Y_d – располагаемый доход
P – уровень цен ($Price$)
CPI – ИПЦ, индекс потребительских цен ($Consumer\ Price\ Index$)
FPI – Индекс Фишера ($Fisher\ Price\ Index$)
π – уровень инфляции
g – уровень экономического роста ($growth$)
C – потребление ($Consumption$)
C_a – автономное потребление
I – инвестиции ($Investitions$)
G – госзакупки ($Government$)
Ex – экспорт
Im – импорт
Xn – чистый экспорт
t – ставка подоходного налога
T_x – налоги ($Taxes$)
T_r – трансферты ($Transfers$)
T – чистые налоги
mpc – предельная склонность к потреблению ($marginal\ propensity\ to\ consume$)
mps – предельная склонность к сбережению ($marginal\ propensity\ to\ save$)
E – количество работающего населения ($Employed$)
U – количество безработных ($Unemployed$)
LF – рабочая сила, экономически активное население ($Labor\ Force$)
u – уровень безработицы ($unemployment$)
u^* – уровень естественной безработицы
β – коэффициент Оукена
M – денежная масса
B – денежная масса
D – объем депозитов
K – объем кредитов
C – объем наличных денег
rr – норма обязательных резервов

er – норма избыточных резервов
cr – норма депонирования
AD – совокупный спрос (*Aggregate Demand*)
$SRAS$ – краткосрочное совокупное предложение (*Short Run Aggregate Supply*)
$LRAS$ – долгосрочное совокупное предложение (*Long Run Aggregate Supply*)
e – валютный курс (*exchange*)
RER – реальный валютный курс (*Real Exchange Rate*)
P_d – внутренний уровень цен (*domestic*)
P_f – иностранный уровень цен (*foreign*)

Математический аппарат

В данном разделе я разберу всю существующую математическую базу для олимпиадной экономики. Однако, этот раздел не является обязательным: нынешняя тенденция состоит в том, что любые задачи можно решить, зная базовый курс школьной математики и не зная, например, производной функции и ее свойств. Тем не менее, хорошее понимание математики (особенно тех ее аспектов, что будут разобраны в данном разделе) ЗНАЧИТЕЛЬНО поможет вам в понимании олимпиадной экономики и ЗНАЧИТЕЛЬНО упростит решение некоторых задач. Однако, вы можете смело переходить к следующим разделам, не разбираясь в этих математических аспектах.

Тангенс

Тангенс угла - очень важная вещь в экономике (и единственное, что вам вообще нужно здесь из тригонометрии). Что такое тангенс угла? Это отношение противолежащего к этому углу катета к прилежащему катету в прямоугольном треугольнике. Если у вас нет прямоугольного треугольника, вы можете сами построить любой прямоугольный треугольник на этом углу и посчитать нужное отношение:

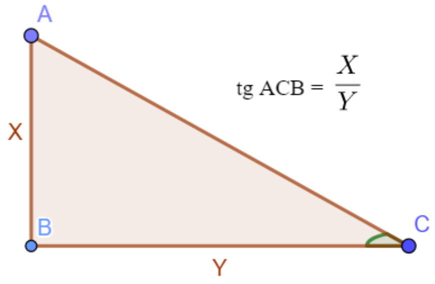


Рис. 1: Тангенс угла

Функции

В экономике в целом (и в олимпиадной экономике в особенности) немного искажено само понятие функции. Мы привыкли из курса математики к тому, что функция - это преобразование значений множества, в котором каждому элементу из изначального множества (из области определения функции) соответствует ОДИН элемент из итогового множества (из области значений фунции). В олимпиадной экономике мы используем более общее понятие функции: одному элементу из области определения может соответствовать НЕСКОЛЬКО элементов из области значений, то есть одному элементу может соответствовать множество других элементов.

Например, здесь вы можете легко встретить такой кусок функции $Q = f(P)$:

$$Q \in [0; \infty]; P = 10$$

Здесь при $P = 10$ значением функции будет целое множество чисел. В общем, вы поняли.

Еще одно важное уточнение: в олимпиадной экономике мы оперируем (за редким исключением) положительными значениями переменных, так как цена, количество, издержки и выручка неотрицательны. Таким образом, большинство графиков будут иметь лишь первую координатную четверть, а функции будут в большинстве своем рассматриваться только на своих положительных участках.

Стандартные функции

Очень важно знать, как выглядят некоторые стандартные функции, которые часто используются в задачах. Так как многие задачи в экономике связаны с оптимизацией, самое важное для нас - понимать, как значение функции зависит от аргумента.

Линейные функции

Стандартная линейная функция имеет вид $y = kx + b$.

Существует три ситуации линейной функции: положительный наклон, отрицательный наклон, и горизонтальная прямая.

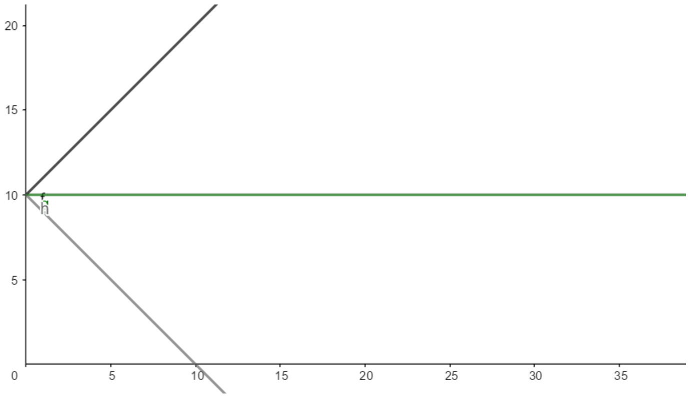


Рис. 2: Линейные функции

Степенные функции

Такие функции имеют вид $y = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ (кстати, линейные функции тоже к ним относятся).

Стандартный пример: парабола ($y = ax^2 + bx + c$). С ней вы, скорее всего, знакомы:

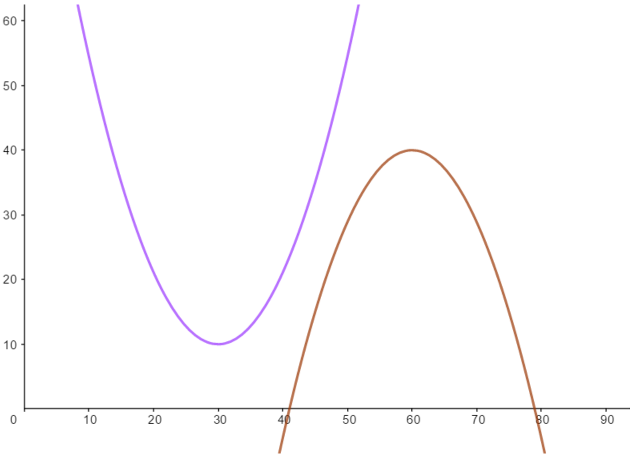


Рис. 3: Параболы

Вид параболы зависит от коэффициента a: при $a < 0$ парабола будет иметь ветви, направленные вниз, а при $a > 0$ - вверх.

Важно понимать, как ведут себя функции больших степеней. Если наибольшая степень функции равна n, то у такой функции в общем виде будет $n-1$ «изгиб». Например, у функции первой степени (линейной) - 0 изгибов. У функции второй степени (параболы) - 1 изгиб. И так далее. Экстремумы (локальные минимумы и максимумы) могут как присутствовать, так и отсутствовать, в зависимости от конкретной функции. Приведу в пример несколько вариантов:

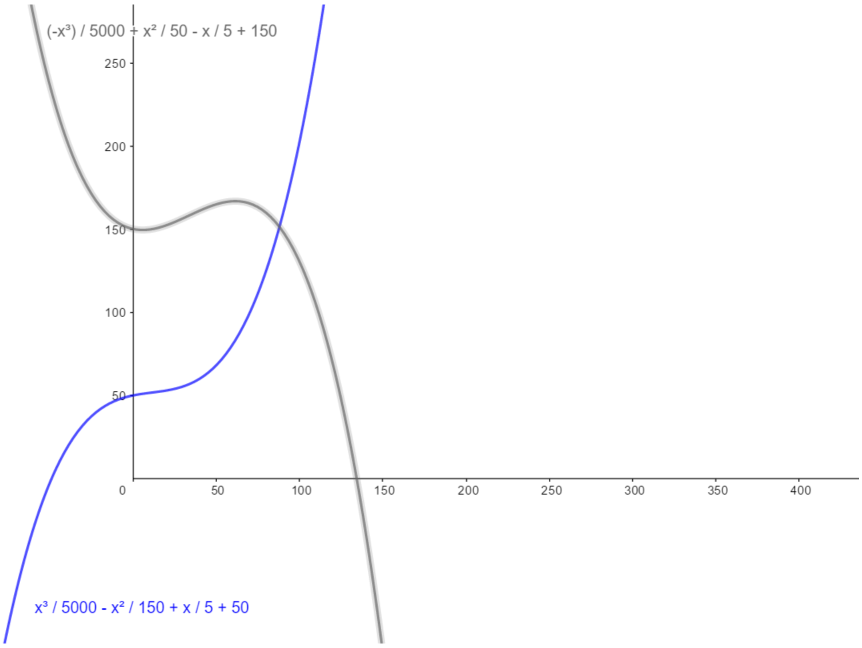


Рис. 4: Уравнения третьей степени: с экстремумами и без них (у серого явно видны локальный минимум и максимум, тогда как у синего их нет). В любом случае, у обоих графиков видно два «изгиба».

Вот еще несколько примеров уравнений других степеней:

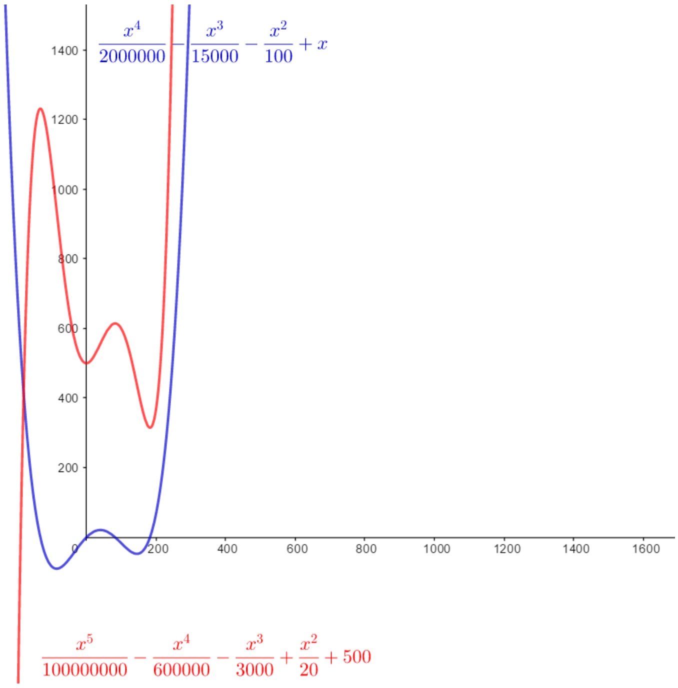


Рис. 5: Стандартные графики 4 и 5 степени. Вы можете заметить: у графика 5-ой степени 4 экстремума, у графика 4-ой степени - 3 экстремума.

Гипербола

Гиперболами я буду называть функции вида $y = \frac{a}{x^n}, n > 0$
С такими функциями многие из вас знакомы. Все они выглядят вот так:

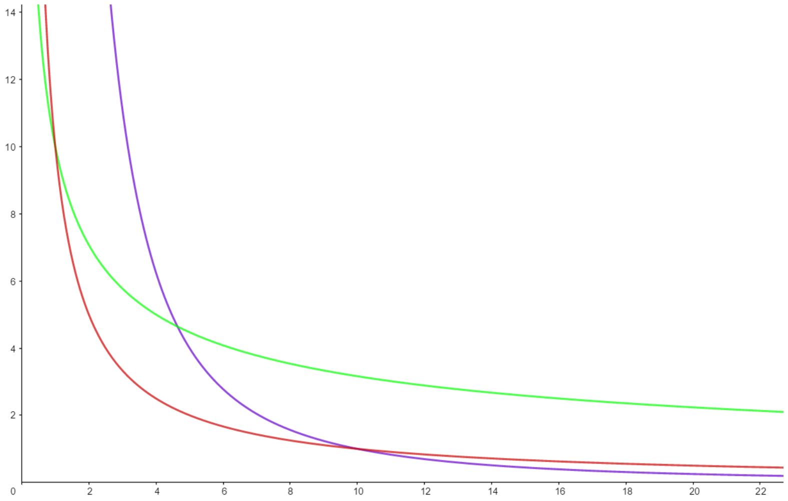


Рис. 6: Гиперболы разных степеней.

«Галочка»

Еще одна часто встречаемая в олимпиадной экономике функция (Я называю ее «Галочкой») образуется из гиперболы первой степени и линейной функции и имеет общий вид $y = ax + \frac{b}{x}$ (например, $y = x + \frac{20}{x}$). При значениях x, близких к 0, линейная часть обнуляется, и такая функция ведет себя, как гипербола. Если же x достаточно велик, то, наоборот, гиперболическая часть практически обнуляется, и функция начинает стремиться к прямой. На следующем графике я изображу гиперболу и прямую, образущие вышеописанную «галочку», а также саму фукнцию:

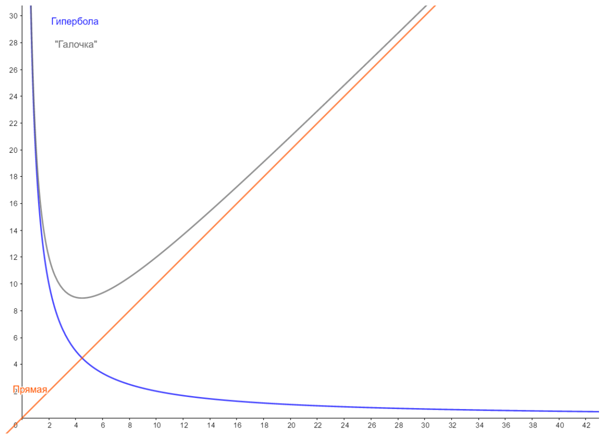


Рис. 7: «Галочка» между гиперболой и прямой.

Функции min и max

Данные функции обычно не изучаются в школьном курсе математики, зато повсеместно используются в экономике, как олимпиадной так и всей остальной. Определение данных функций:

$$min(x, y) = \begin{cases} x, x < y \\ y, x \geqslant y \end{cases}$$

Аналогично для функции максимума:

$$max(x, y) = \begin{cases} y, x < y \\ x, x \geqslant y \end{cases}$$

Данные функции требуют наличия двух и более аргументов. Как вы могли заметить, функция max принимает максимальное значение из своих аргументов, а функция min принимает минимальное значение из своих аргументов. Вот вам пример:

$$y = min(x^2, 16)$$

У данной функции два аргумента - x^2 и 16. По-отдельности две данные функции выглядят следующим образом:

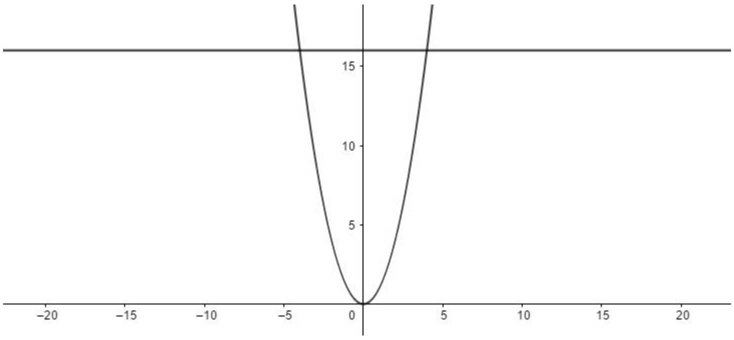


Рис. 8: $y = x^2$ и $y = 16$

Теперь, для каждого x функция выбирает наименьшее значение. Если $x^2 > 16$, то функция равна 16, а если $x^2 < 16$, то функция равна x^2. В итоге, функция выглядит следующим образом:

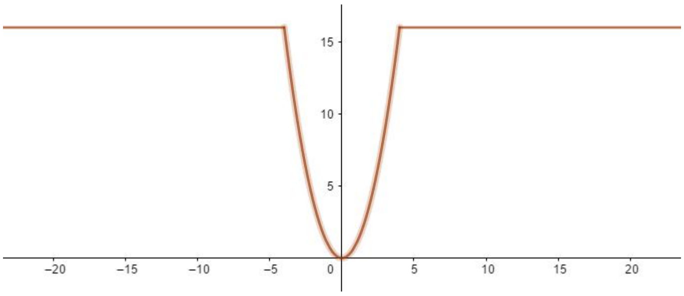


Рис. 9: $min(x^2, 16)$

Соответственно, функция $y = max(x^2, 16)$ выглядит вот так:

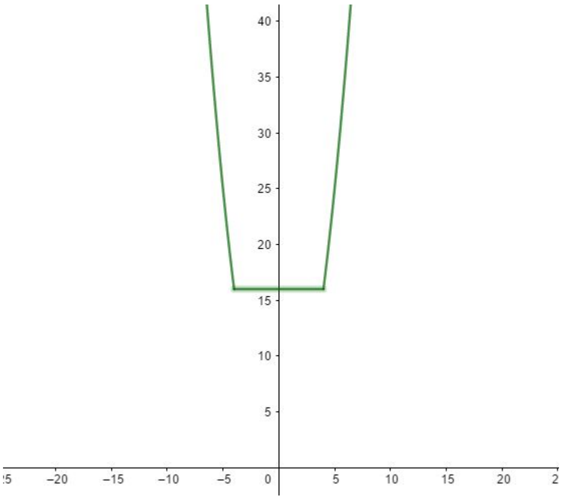


Рис. 10: $max(x^2, 16)$

Прогрессии

В задачах вы точно будете сталкиваться с подсчетом суммы, каждое следующее слагаемое которой получается из предыдущего по какому-либо правилу. Таким последовательности чисел называют **прогрессиями**. Существуют два основных виджа прогрессий: арифметическая и геометрическая. Формулы этих прогрусси стоит запомнить наизусть.

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия – это последовательность чисел, каждое из которых отличается от предыдущего на одну и ту же величину. Разница между двумя последовательными числами называется шагом прогрессии (обозначается буквой d). Каждый член програссии обозначается как a_i, где i – номер этого члена в последовательности. Например, a_1 – это первый член прогрессии.

Пример арифметической прогрессии: 1 3 5 7 9 ...

Общий вид n-ного члена прогрессии имеет вид $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$.

Сумма всех членов арифметической прогрессии считается как сумма первого и последнего членов прогрессии, умноженная на количество членов прогрессии и деленная пополам:

$$\sum_a = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – это последовательность чисел, каждое из которых получается из предыдущего с помощью домножения на одну и ту же величину. В таком случае эта величина (та, на которую домножается каждое следующее число) называется шагом геометрической прогрессии и обозначается буквой q. Чтобы не путать с арифметической прогрессией, члены геометрической прогрессии обозначаются как b_i.

Пример геометрической прогрессии: 1 2 4 8 16 32 ...

Общий вид n-ного члена геометрической прогрессии имеет вид $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Сумма всех членов арифметической прогрессии имеет следующий формулы (первая удобна для возрастающей ($q > 1$) прогрессии, а вторая – для убывающей ($q < 1$)):

$$\sum_g = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1-q}$$

Чаще, чем обычная геометрическая прогрессия, используется бесконечно убывающая геометрическая прогрессия ($q < 1$, $n \to \infty$), которая имеет более простую формулу:

$$\sum_g^{q<1 \;\; n\to\infty} = \frac{b_1}{1-q}$$

Квадратичная прогрессия

Стоит также запомнить формулу прогрессии квадратов:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Например, по этой формуле $1^2 + 2^2 + 3^2 = \sum_{i=1}^{3} i^2 = \frac{3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3 + 1)}{6} = 14$

Более сложные прогрессии, метод пирамидки

Теперь рассмотрим вариант комбинации арифметической и геометрической прогрессии, например такую:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\dots$$

В общем, n-ный член такой прогрессии можно описать формулой $\frac{n}{2^n}$. Сумму такой прогрессии можно рассчитать по методу «пирамидки». Разобьем все слагаемые на такие, которые не образуют арифметическую прогрессию, то есть на сумму с единицами в числителе:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\dots=\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+\dots$$

И теперь перегруппируем получившиеся слагаемые:

$$\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+\dots=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots)+(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots)+(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots)+\dots$$

Таким образом, мы получаем в каждой скобке бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с разными первыми членами, на одниковым шагом, равным $\frac{1}{2}$:

$$(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots)+(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots)+(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots)+\dots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}+\dots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$$

Как вы видите, суммы прогрессий сами образовали бесконечно убывающую прогрессию, которую мы можем рассчитать:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

Все, сумма искомой прогрессии оказалась посчитана:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\dots=2$$

Производная

Актуальный вектор развития олипиадной экономики таков, что все задачи до 11 класса теперь можно решить без знания производной. Более того, это может даже быть прописано в преамбуле заданий или же постулировано составителями. Огромный совет: не верьте всему этому. Понимание производной, ее свойств и функций ускоряет решение задач в несколько раз и хорошо структурирует ваше мышление. Более того, для понимания большей части теории вам будет необходима производная.

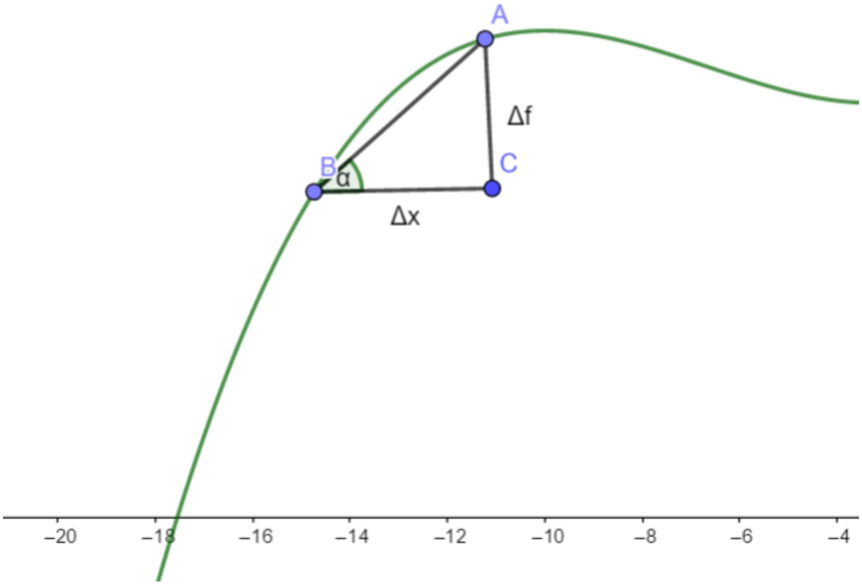


Рис. 11: Интерпретация производной функции.

Что такое производная?

Довольно часто можно услышать следующую интерпретацию производной: «это скорость роста функции». На мой взгляд, это самая лучшая интерпретация. Чтобы проанализировать функцию, необходимо понять, как она себя ведет и как выглядит ее график, и для всего этого нам необходимо понятие скорости роста функции. Не пугайтесь того, что будет происходить дальше, а внимательно вчитайтесь.

Так что мы называем скоростью роста? Посмотрите на график:

Здесь находятся две точки: A и B, лежащие на одной функции. Значения функции в этих точках отличаются на Δf, а значения аргумента - на Δx. Так вот, скоростью роста функции мы будем называть частное $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, то есть то, насколько быстро растет значение функции по сравнению с аргументом функции. Заметим, что это отношение равно тангенсу угла α. Посмотрите на иллюстрацию ниже: там, где функция растет «быстро» (левый рисунок), это отношение довольно велико, а там, где она растет «медленно» (правый рисунок), это отношение небольшое.

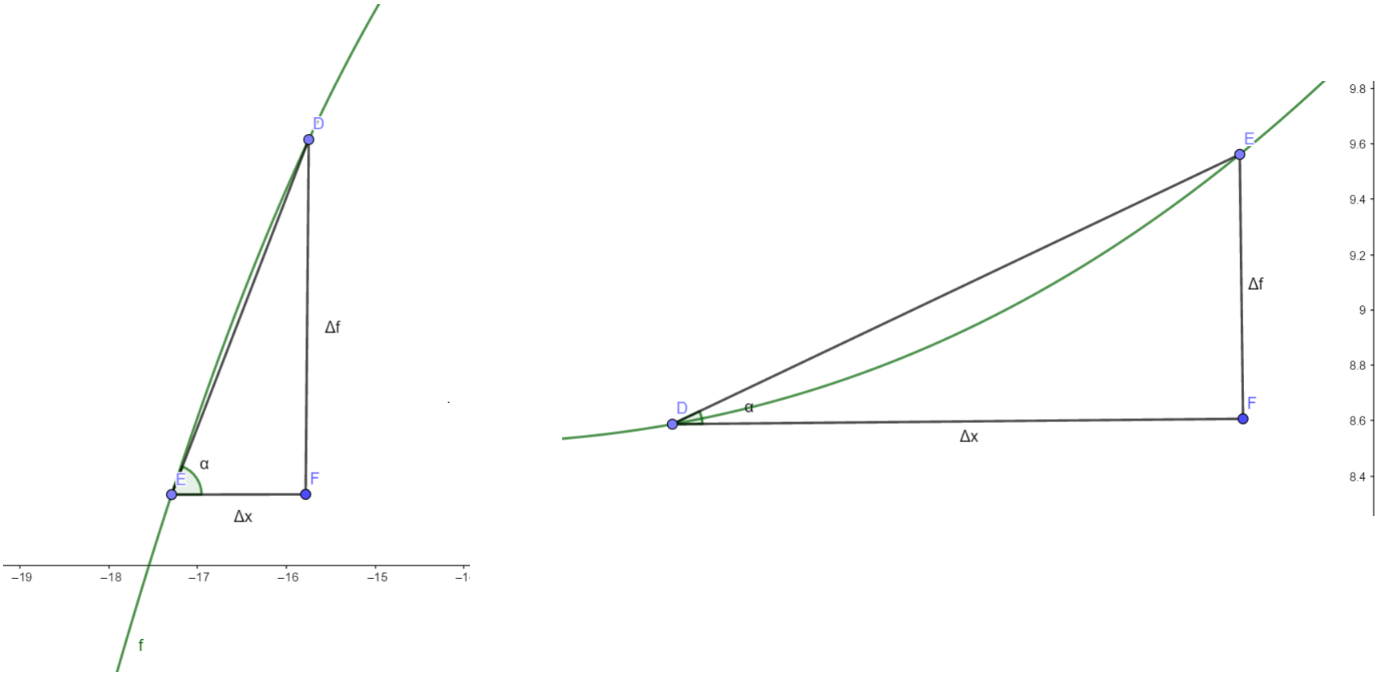


Рис. 12: Большая и маленькая производная функций.

Также, на участке, где функция убывает, скорость ее роста будет отрицательной, так как Δf и Δx разнонаправлены (если рассматривать изменение от левой точки к правой, Δx положителен, а Δf отрицателен):

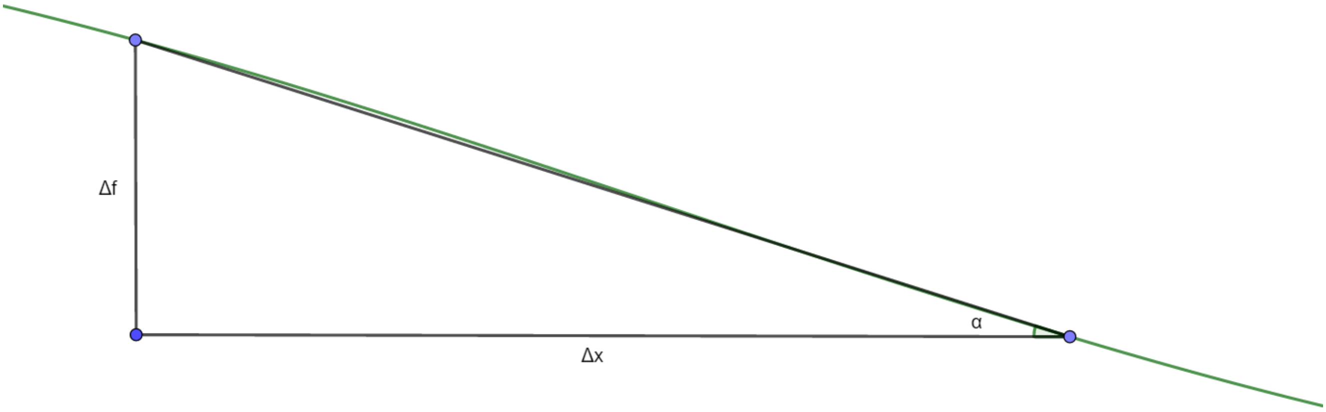


Рис. 13: Отрицательная скорость роста ($\Delta f < 0$).

После того, как мы поняли, что такое скорость роста функции, перейдем к определению производной. Производная функции $f(x)$ обозначается как $f^{'}(x)$ и строгое математическое ее определение таково:

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Для тех, кто не знаком с пределами, объясню: с помощью него мы обозначаем, что хотим взять как можно меньший, но не нулевой Δx. Сами пределы не нужны для решения олимпиадных задач, не

волнуйтесь.
Заметим, что сверху стоит как раз разница между двумя значениями функции, от x и от $x + \Delta x$, то есть $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$. Получаем, что эту формулу можно выразить как.

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = (x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Что же это у нас получилось? Знакомая формула скорости роста функции, только в пределе, где изменение аргумента стремится к 0. Получается, для того, чтобы посчитать производную, мы берем точку A и начинаем бесконечно приближать ее к точке B, постоянно уменьшая Δx и устремляя его к нулю:

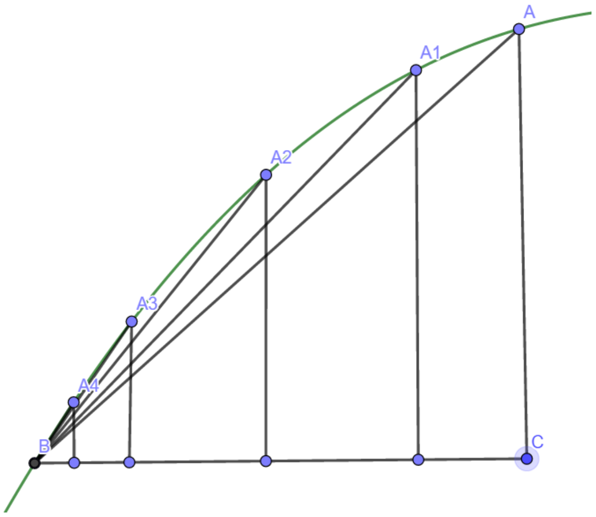


Рис. 14: Уменьшение Δx.

Таким образом, в точке B у нас образуется бесконечно малый треугольник с бесконечно маленькими Δf и Δx, и мы хотим посчитать $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ уже именно для этого треугольника.
А теперь я предлагаю вам напрячь свое воображение и представить себе этот бесконечно маленький треугольник и его гипотенузу. Так как треугольник этот, по сути, - точка, то и гипотенуза его будет лежать в этой точке. А теперь проведем к точке B (в которой лежит наша гипотенуза) касательную. Тогда получается, что гипотенуза нашего треугольника будет лежать на этой касательной, а, следовательно, иметь наклон, равный наклону этой касательной. - Получается, скорость роста функции **конкретно в этой точке** будет равна скорости роста касательной в этой точке и будет равна тангенсу угла наклона касательной. Таким образом, производная в каждой конкретной точке функции определяется наклоном касательной (в дальнейшем вместо «тангенса угла наклона» я буду говорить просто «наклон») в этой точке. Другими словами, наклон касательной в точке показывает скорость роста функции в этой точке (и эта скорость роста и называется производной функции). Ниже представлена графическая иллюстрация:

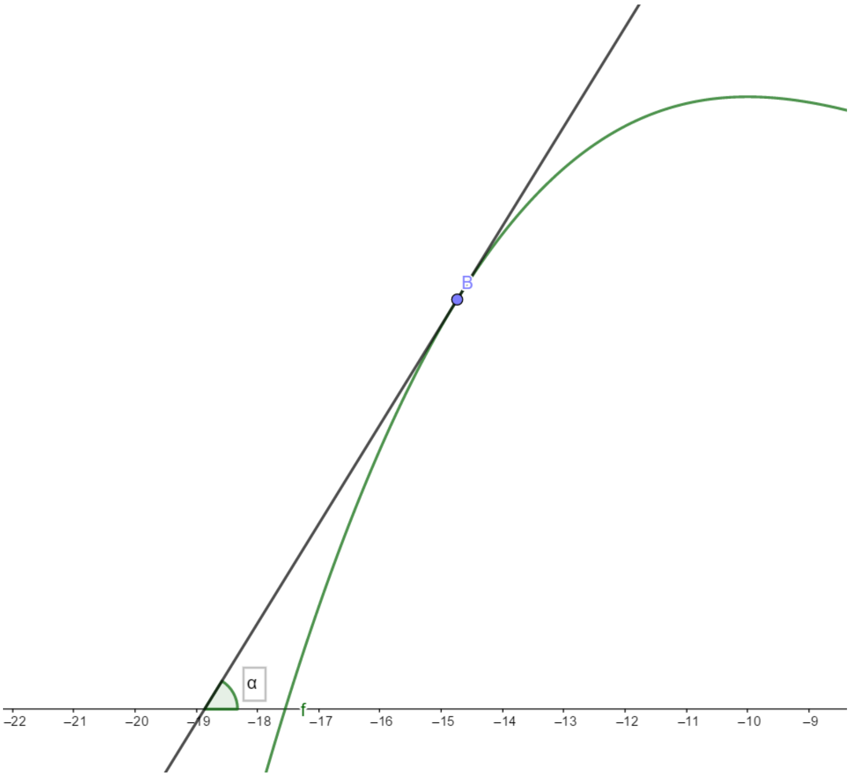


Рис. 15: Тангенс угла α равен производной функции (она же скорость роста функции) f в точке B.

Чем «быстрее» растет функция, тем «круче» будет ее касательная (то есть тем больший наклон она будет иметь). Если функция убывает, то тангенс ее угла наклона с положительным направлением оси аргумента будет отрицательным (т.к. угол будет тупым):

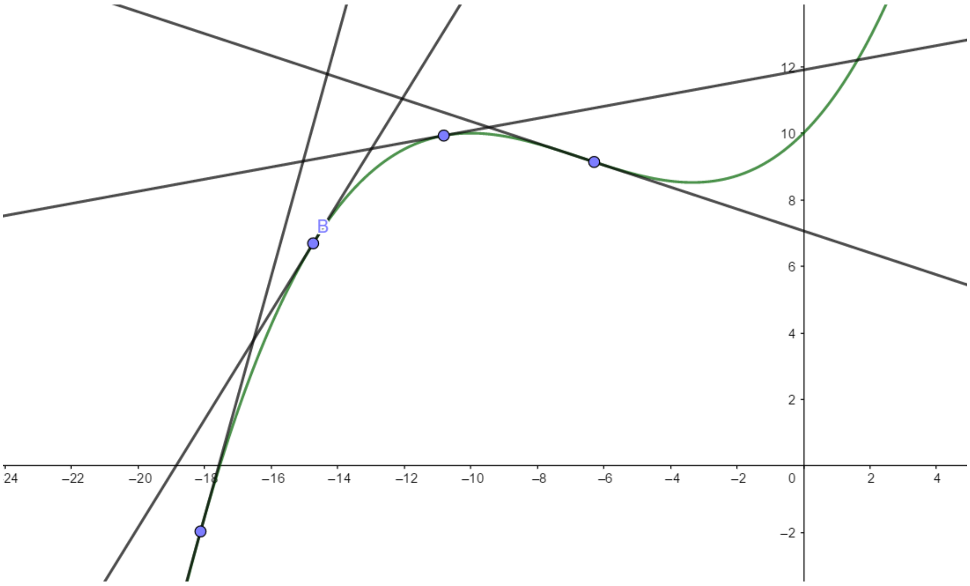


Рис. 16: Различные наклоны касательных к различным точкам. Чем круче касательная, тем больше наклон. Касательная к точке, в которой функция убывает, имеет отрицательный наклон.

Кстати, почему-то многие не знают правильного определения касательной. Касательная - это **НЕ** прямая, имеющая одну общую точку с графиком функции. Она может иметь сколько угодно точек пересечения. **Касательная - это прямая, которая в точке пересечения с функцией имеет наклон, равный производной этой функции.**

Вычисление и свойства производной

Вычисление производной

Для курса олимпиадной экономики вам понадобится лишь формула для вычисления производной степенных функций (многочленов). Она выглядит следующим образом:

$$(ax^n)' = anx^{n-1}$$

Например, $(4x^3)' = 4 * 3 * x^{3-1} = 12x^2$. Отсюда можно понять, что наклон касательной к функции $4x^3$ в точке $x = 2$ равен $12 * 2^2 = 48$ (если рисовать такой наклон, то касательная будет выглядеть почти вертикальной), а, например, в точке $x = 0$ касательная будет иметь наклон 0, то есть будет являться *горизонтальной*:

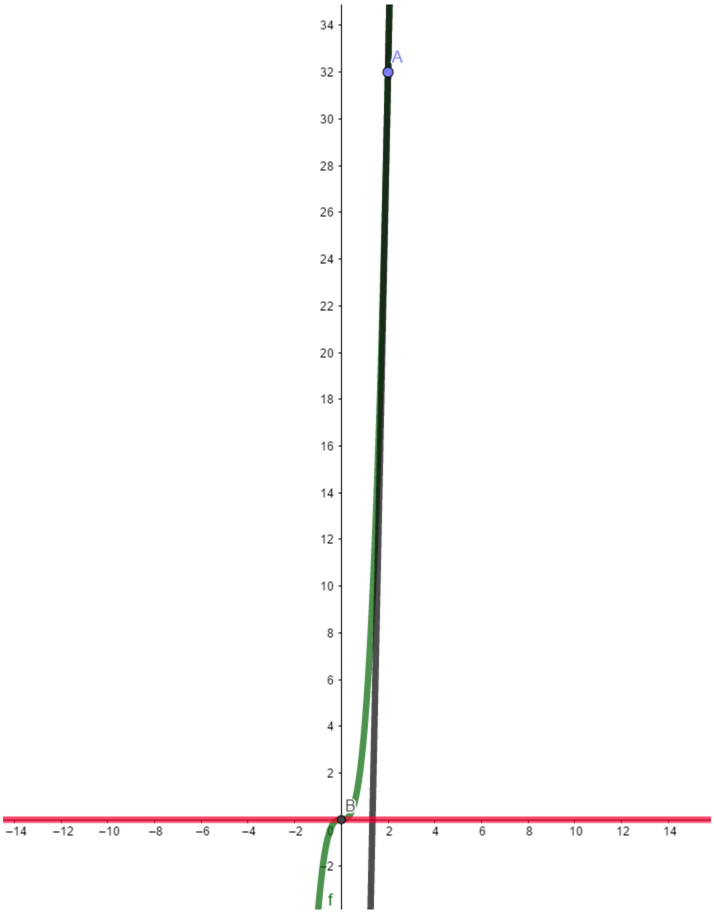


Рис. 17: Касательные к графику $y = 4x^3$.

Базовые свойства производной

1. $c' = (c * x^0)' = c * 0 * x^{-1} = 0$, например, $10' = 0$ (Так как функция, являющаяся константой, никогда не изменяется, то и скорость ее роста в каждой точке равна 0).
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ Например, $(4x^2 + 3x)' = (4x^2)' + (3x)' = 8x + 3$.
3. $(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + g'(x) * f(x)$. Например, $(4x * 5x)' = (4x)' * 5x + (5x)' * 4x = 4 * 5x + 5 * 4x = 40x$. (То же самое можно было посчитать, сразу же перемножив две функции: $(4x * 5x)' = (20x^2)' = 40x$).
4. $(\dfrac{f(x)}{g(x)})' = \dfrac{f'(x) * g(x) - g'(x) * f(x)}{g^2(x)}$. Например, $(\dfrac{8x}{x^2 + 5x})' = \dfrac{8 * (x^2 + 5x) - (2x + 5) * 8x}{(x^2 + 5x)^2}$.
5. $(f(g(x)))' = f'(g) * g'(x)$. Например, $((6x + 3)^2)'$. Здесь $g = 6x + 3$, а $f = g^2$. Значит $g'(x) = 6$, $f'(g) = 2g$. Тогда $((6x + 3)^2)' = 2g * 6 = 2(6x + 3) * 6 = 72x + 36$.

Оптимизация функций

В олимпиадной (и не только) экономике большинство задач сводятся к проблемам оптимизации. Оптимизация функции - это ее минимизация (например, минимизация издержек или общественных потерь), или же максимизация (например, прибыли или полезности). Оптимизационные задачи встречаются во всех разделах олимпиадной экономики, так что оптимизировать вам придется довольно много.

Глобальные и локальные минимумы/максимумы

Данные термины обязательно должны присутствовать в вашем словарном запасе.

Глобальным максимумом(минимумом) мы называем значение функции, значение больше(меньше) которого функция принимать не может.

Локальным максимумом(минимумом) мы называем значение функции, до которого функция возрастает(убывает), а после которого - убывает(возрастает).

Посмотрите на следующий график:

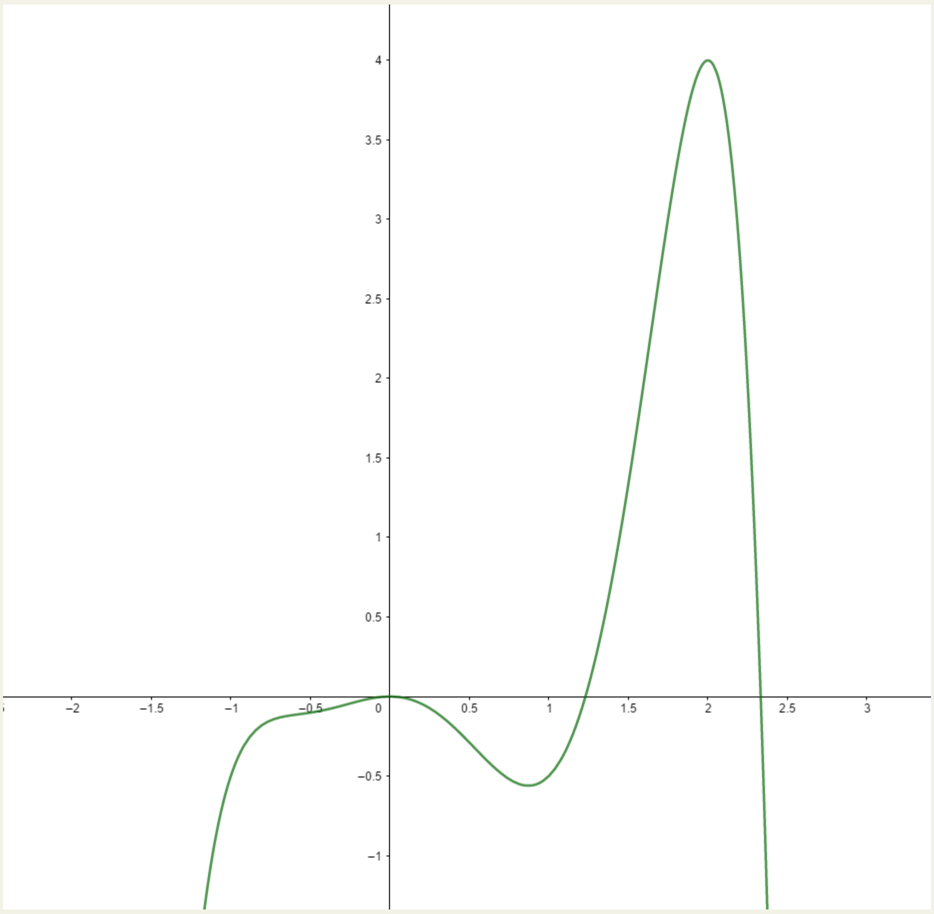


Рис. 18: График какой-то функции.

Здесь имеется точка **глобального** максимума при $x \approx 2$ (имеется ввиду, что функция убывает далее и вправо и влево). Также имеется **локальный максимум** в точке $x = 0$ и **локальный минимум** в точке $x \approx 0.9$.

Оптимизация функций одной переменной

Это самый базовый раздел, в котором мы разберем оптимизацию обычных функций.

Параболы

Чаще всего в оптимизационных задачах вам будут встречаться параболы. Их оптимизация довольно проста.

Посмотрим на следующую функцию:

$$y = 4x^2 - 48x + 36$$

График этой функции - парабола ветвями вверх. Значит, у нее нет глобального максимума, но есть глобальный минимум, который достигается в ее вершине. Следовательно, нам нужно просто найти вершину параболы. Это можно сделать по школьной формуле $x^* = \dfrac{-b}{2a}$, где a и b, соответственно, коэффициенты при квадратичной и линейной части параболы. В нашем случае, $a = 4$, $b = -48$, значит $x^* = \dfrac{-(-48)}{2 * 4} = 6$. Следовательно, минимальное значение функции это $y^* = 4 * 6^2 - 48 * 6 + 36 = -108$.

Также вершину можно найти, зная, что в вершине параболы производная равна нулю (касательная является горизонтальной). Производная данной функции $y' = 8x - 48 = 0$, откуда $x^* = 6$.

Если x^* является вершиной параболы $y = ax^2+bx+c$, то парабола имеет значение в вершине, равное $y^* = -a(x^*)^2 + c$. Данный факт значительно упрощает подстановку вершины в саму параболу в случаях, если в уравнении есть параметры, и в дальнейшем я буду его использовать.

Другие функции

Допустим, нам встретилась следующая функция:

$$y = \frac{10x + 7}{3x^2 + 9x + 13.5}$$

Нам нужно найти минимум этой функции. С первого взгляда мы не можем сказать, как выглядит ее график, то есть не можем сказать, имеет ли она вообще минимум, и если и да, то где он. В таких случаях придется проводить **математический анализ** функции. Сейчас посмотрим, из чего он состоит. (Я сразу взял довольно сложную функцию, чтобы вы увидели, что таким образом прооптимизировать можно практически все. Обычно функции оказываются значительно проще)

О том, как выглядит функция, очень хорошо говорит ее производная. Так что математический анализ всегда заключается в анализе производной. Возьмем ее, вспомнив производную частного:

$$y' = \frac{10(3x^2 + 9x + 13.5) - (6x + 9)(10x + 7)}{(3x^2 + 9x + 13.5)^2}$$

$$y' = \frac{-30x^2 - 42x + 72}{(3x^2 + 9x + 13.5)^2}$$

Найдем **критические точки** функции (такие точки, в которых производная равна 0, то есть касательная к которым является горизонтальной):

$$-30x^2 - 42x + 72 = 0$$

$$5x^2 + 7x - 12 = 0$$

$$\left[\begin{array}{lcr} x & = & 1 \\ x & = & -\frac{12}{5} \end{array}\right.$$

Критические точки - потенциальные кандидаты на оптимум. Но, чтобы проверить, как ведет себя функция в критических точках, нам нужно посмотреть еще и на **вторую производную** f''. Вторая производная - это, соответственно, скорость роста первой производной функции (То есть производная производной). Если вторая производная положительная, то функция на этом участке называется **выпуклой**. Если вторая производная отрицательная, то этот участок функции называется **вогнутым**. Если же вторая производная равна 0, то функция в данной точке не изменяет свою скорость роста. То есть либо это прямая (у которой постоянная скорость роста), либо это **точка перегиба**. Посмотрите на график:

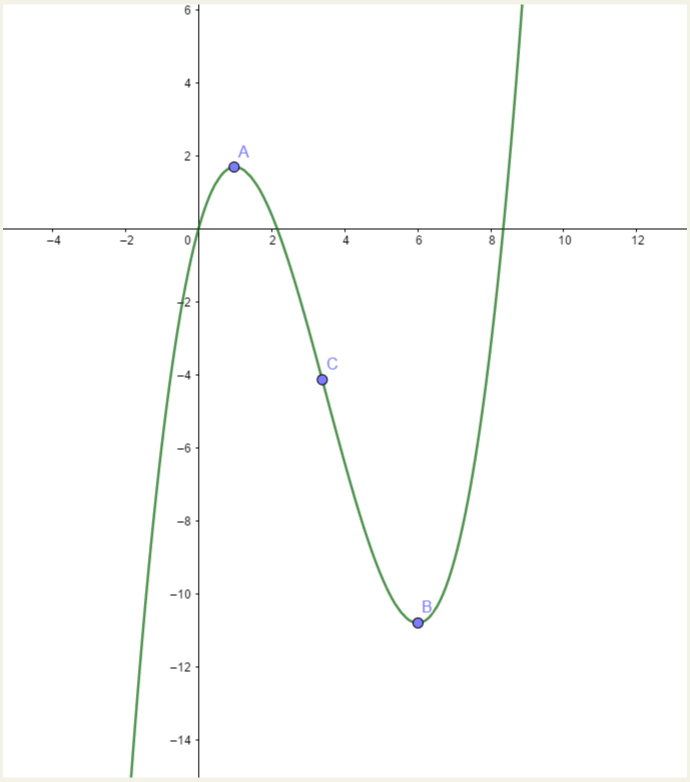


Рис. 19: Критические точки

Точки A и B - критические точки (в них горизонтальная касательная, и, соответственно, нулевая производная). Точка C - точка перегиба функции (точка с нулевой второй производной). Посмотрим на точку A. До нее функция возрастает, но все медленнее и медленнее. Это значит, что ее скорость роста уменьшается. Значит скорость роста скорости роста отрицательная (так как скорость роста уменьшается). Это и есть отрицательная вторая производная. Можно заметить, что и после точки A функция все быстрее и быстрее падает, значит, вторая производная продолжает быть отрицательной. (Скорость роста все меньше и меньше, так как она отрицатльная и все дальше и дальше от нуля.) Но после точки C все меняется, и функция начинает замедлять падение, то есть ее производная начинает расти. Это значит, что вторая производная стала положительной. Вот таким образом выглядят выпуклая (слева, $f'' > 0$) и вогнутая (справа, $f'' < 0$) функции:

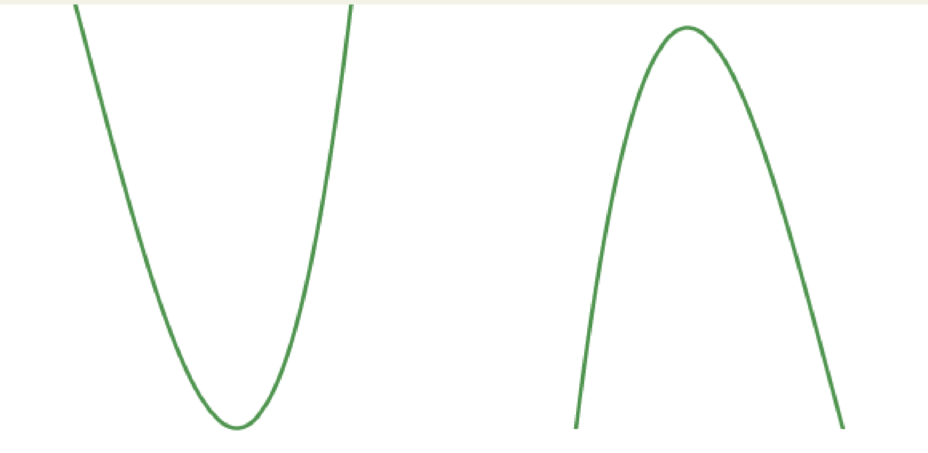


Рис. 20: Выпуклый и вогнутый участки

Довольно просто можно их различать: если $f'' < 0$, то это грустный смайлик, а если $f'' > 0$, то веселый. Соответственно, если вы нашли критические точки, то вы нашли **максимум** функции, если в этой точке вторая производная отрицательна и **минимум**, если вторая производная положительна. Если же вторая производная равна 0, то вы нашли точку перегиба (например, так будет у функции $y = x^3$ в точке $x = 0$. $y' = 3x^2 = 0$, $y'' = 6x = 0$)

Итак, вернемся к нашей функции и ее производной:

$$y = \frac{10x + 7}{3x^2 + 9x + 13.5}$$

$$y' = \frac{-30x^2 - 42x + 72}{(3x^2 + 9x + 13.5)^2}$$

Возьмем вторую производную функции (здесь я воспользовался производной частного и немного упростил):

$$y'' = \frac{20x^3 + 42x^2 - 144x - 207}{3(x^2 + 3x + 4.5)^3}$$

Подставим наши критические точки (1 и $-\frac{12}{5}$):

$$y''(1) = \frac{20 + 42 - 144 - 207}{3(1 + 3 + 4.5)^3} \approx -1.57 < 0$$

$$y''(-\frac{12}{5}) \approx 1.21 > 0$$

Следовательно, $x = 1$ - это максимум нашей функции, а $x = -\frac{12}{5}$ - минимум. Собственно, вот как выглядит наша функция:

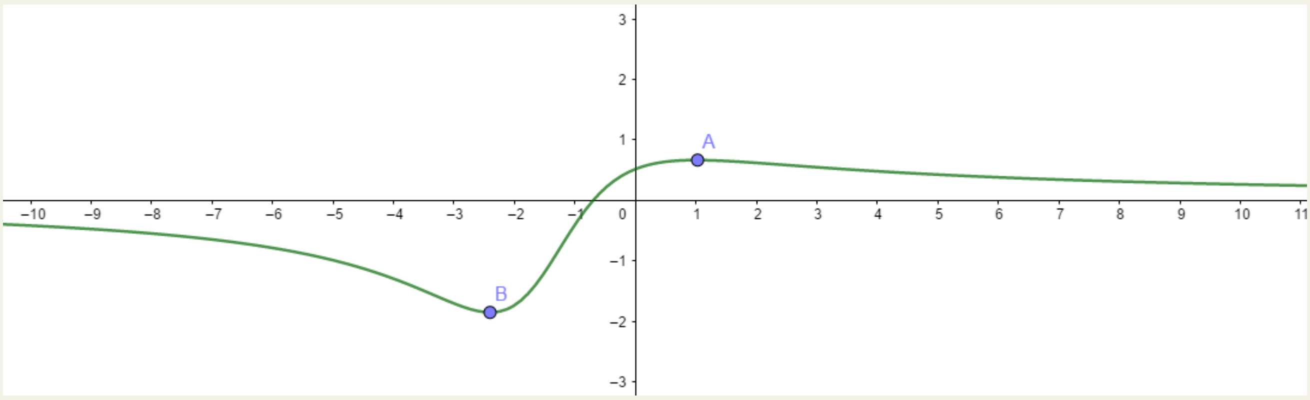


Рис. 21: График функции $y = \dfrac{10x+7}{3x^2+9x+13.5}$.

Таким образом можно анализировать абсолютно любые функции.

Запомните одно очень важное правило: в олимпиадах для оптимизации функции **ОБЯЗАТЕЛЬНО** необходимо указывать, как она выглядит. Данный пункт есть во всех критериях. Если вы оптимизируете функцию и не указываете, как выглядит ее график, то у вас в любом случае снимут баллы! Так и пишите: **графиком данной функции является парабола ветвями вниз** или **графиком функции является прямая с положительным наклоном** или рисуйте небольшую картинку как выглядит функция. Одним словом вы **ОБЯЗАТЕЛЬНО** должны хоть как-то указать, что вы понимаете, как она выглядит.

Ограничения в оптимизации

Чаще всего встречаются задачи на оптимизацию с ограничениями. Как выводить ограничения из условия задачи мы поговорим чуть позже, а сейчас посмотрим на задачи оптимизации с уже полученными ограничениями.

Допустим, наша задача - максимизировать следующую функцию с ограничениями:

$$y = 6x + 10 \ s.t. \ 0 \leqslant x \leqslant 5$$

Графиком данной функции является прямая. Оптимизация прямой с ограничениями довольно проста: максимум всегда достигается на одном из ограничений (либо в $x = 0$, либо в $x = 5$). Данная функция возрастает по x, следовательно, для ее максимизации мы возьмем максимальное значение x. Тогда максимум функции $y = 6x + 10$ достигается при $x^* = 5$ и равен $y^* = 40$. Посмотрите на графическую интерпретацию:

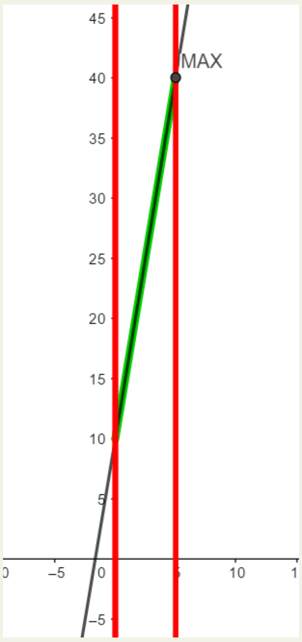


Рис. 22: Оптимум линейной функции с ограничениями

Точно так же, например, будет максимизироваться парабола ветвями вверх. Максимум всегда будет на одном из ограничений, как бы они ни были расположены:

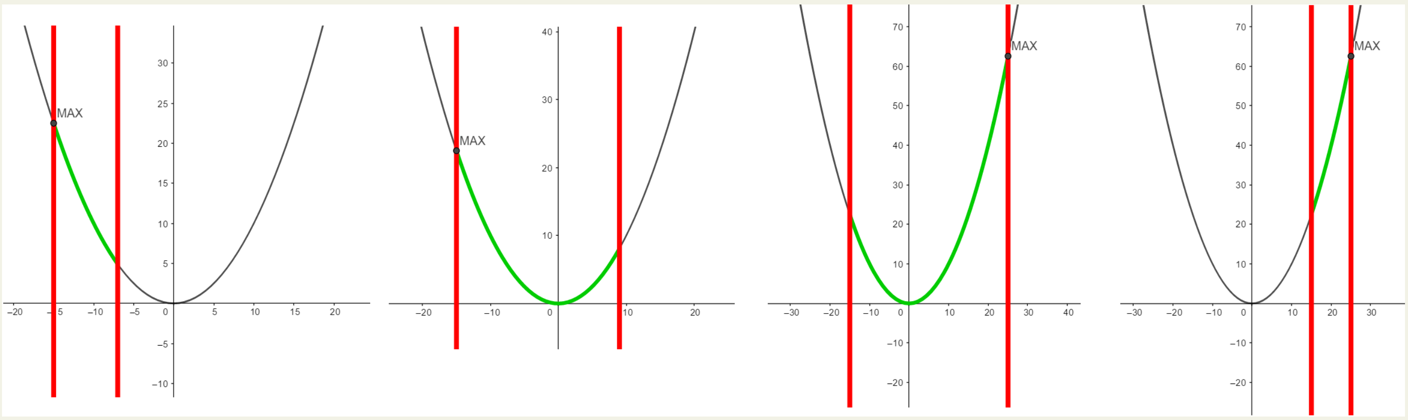


Рис. 23: Оптимум всегда на одном из ограничений

То есть для максимизации параболы ветвями вверх достаточно посмотреть на значения функции в каждом ограничении и посмотреть, какое из них больше. Альтернативный вариант - посмотреть, какая точка дальше от вершины (чем дальше точка от вершины параболы, тем больше значение функции). Однако, второй метод работает **только** на параболе..

Максимум на одном из ограничений будет достигаться и во всех остальных функциях, имеющих один локальный минимум. Например, функция $y = x + \dfrac{1}{x}$ будет максимизироваться точно так же (нужно рассмотреть значения в каждом ограничении и выбрать наибольшее). Пусть наши ограничения будут следующими: $\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 5$. Данная функция имеет вид Галочки и имеет один локальный минимум. Значит, нужно посмотреть на значения на ограничениях: $y(\dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{3} + 3 = 3\frac{1}{3}$ $y(5) = 5 + \dfrac{1}{5} = 5\frac{1}{5}$. $5\frac{1}{5} > 3\frac{1}{3}$, значит, максимум функции достигается в точке $x^* = 5$ и равен $y^* = 5\frac{1}{5}$:

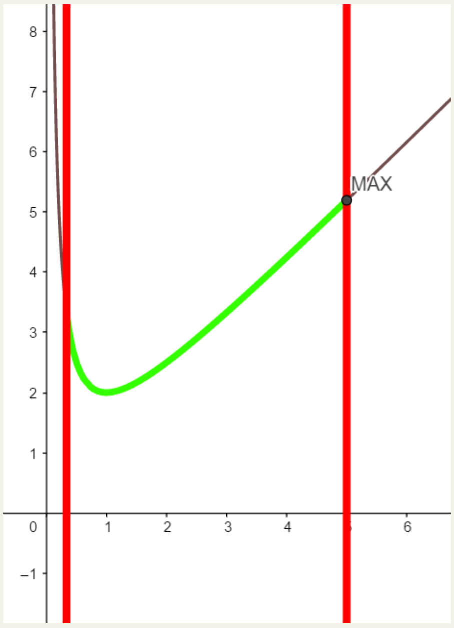


Рис. 24: Максимум на галочке

Все сказанное выше верно также для **минимизации** функций, чьи ветви направлены вниз.

Далее мы рассмотрим максимизацию функций с ветвями вниз. (Все нижесказанное будет также верно для **минимизации** функций с ветвями вверх).

Начнем с параболы. У параболы ветвями вниз максимум вершины находится в точке $x^* = \frac{-b}{2a}$, однако, не стоит забывать про ограничения. Промаксимизируем, допустим, вот эту параболу с ограничением:

$$y = -x^2 + 6x + 10, \ \ s.t. \ 0 \leqslant x \leqslant 5$$

Это парабола ветвями вниз, а, следовательно, имеет максимальное значение в вершине. $x^* = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$. Вершина удовлетворяет нашему ограничению, значит, максимум достигается при $x = 3$.

Теперь посмотрим на следующую параболу:

$$y = -2x^2 - 24x - 145 \ s.t. \ 0 \leqslant x \leqslant 5$$

Вершина данной параболы находится в точке $x^* = -6$, однако, вершина параболы лежит вне наших ограничений. Получается, мы рассматриваем нашу параболы только на следующем промежутке:

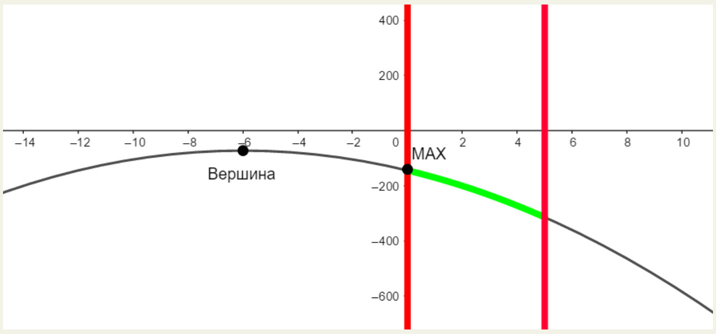


Рис. 25: Максимум в нуле

Соответственно, максимум достигается в точке $x = 0$. Получается, можно применять следующее правило при максимизации параболы ветвями вниз: **если вершина параболы недоступна, то максимум достигается в ближайшей точке к вершине**. Но есть еще одно более употребимое в решении задач правило:

Для функций с одним экстремумом верны следующие утверждения:
Если вершина не удовлетворяет одному из ограничений, то оптимумом является это ограничение.
Если вершина не удовлетворяет нескольким ограничениям, то оптимумом является одно из этих ограничений и их просто нужно сравнить.

Все эти утверждения основаны на том факте, что ограничение, выбивающее наш оптимум, будет к нему ближе всего.

Например, оптимумом нашей прошлой функции являлся $x^* = -6$, но он не удовлетворял ограничению $x \geqslant 0$. Следовательно, оптимумом является это самое ограничение: $x = 0$.

Теперь рассмотрим максимизацию следующей функции:

$$y = -4x - \frac{16}{x} + 20 \; s.t. \; 0 < x \leqslant 1$$

Предположим, мы не знаем, как она выглядит, так что немного ее проанализируем. Приравняем первую производную к 0:

$$y' = -4 + \frac{16}{x^2} = 0$$

$$4 = \frac{16}{x^2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Нас интересуют только положительные значения x, так что будем анализировать только корень $x = 2$ (у функции есть разрыв в точке $x = 0$, так как она там не определена, но при $x > 0$ функция непрерывна).

Проверим, что точка $x = 2$ является максимумом функции с помощью второй производной:

$$y'' = (-4 + \frac{16}{x^2})' = (16x^{-2})' = -32x^{-3} = \frac{-32}{x^3} = -4 < 0$$

Так как вторая производная отрицательная, то в точке $x = 2$ функция имеет максимум.

Далее проверяем ограничения, и оказывается, что $x = 2$ не удовлетворяет ограничению $x \leqslant 1$. Следовательно, оптимум достигается на ограничении: $x = 1$. Посмотрите на графическую интерпретацию:

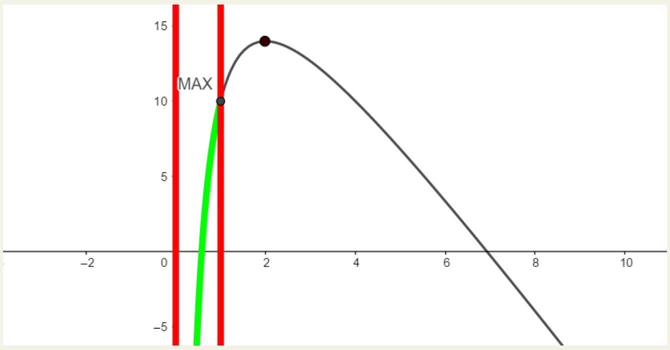


Рис. 26: Максимум галочки с ограничениями

Более сложные случаи coming soon

Оптимизация с параметром

В этом разделе я покажу один пример оптимизации функции с параметром. Вообще, параметры - довольно продвинутая область в школьной математике, для которой требуются хорошие навыки и значительные умственные усилия. Задачи с параметрами бывают настолько разноплановые, что нет никакого универсального метода их решения. Разберем пример одной такой задачи:

Будем максимизировать функцию с ограничениями и параметром:

$$y = ax^2 - 10x + 5 \; s.t. \; 0 \leqslant x \leqslant 4$$

Здесь a - это параметр, который может принимать любые вещественные значения. Так что задача сводится к тому, чтобы найти оптимальное (максимизирующее y) значение x для любого значения a. Приступим.

Первым делом при оптимизации функции всегда нужно сказать, как выглядит ее график (если сказать не можете - придется проводить матанализ с помощью первой и второй производной). Оказывается, что при различных значениях параметра график функции может выглядеть по-разному.

Так, при $a < 0$ график - парабола с ветвями вниз, при $a > 0$ - с ветвями вверх, а при $a = 0$ график - вообще прямая с отрицательным наклоном. Так что нам придется рассмотреть все 3 случая.

1) $a < 0$ Наша функция - парабола с ветвями вниз. Максимум - в вершине. Вершина параболы находится в точке $x^* = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{a}$. Заметим, что так как $a < 0$, то вершина отрицательна, следовательно, не удовлетворяет ограничению $x \geqslant 0$. Значит, оптимум в точке $x = 0$.

2) $a > 0$ Наша функция - парабола с ветвями вверх. Максимум - на одном из ограничений. Подставим их и сравним:

$$y(0) = 5, y(4) = 16a - 35$$

Найдем, при каких значениях $x = 0$ дает большее значение функции:

$$5 > 16a - 35$$

$$40 > 16a$$

$$a < 2.5$$

Соответственно, при $a = 2.5$ два значения равны (то есть оба $x = 0$ и $x = 4$ являются оптимумами), а при $a > 2.5$ оптимумом является $x = 4$. Тогда оптимум:

$$\begin{cases} x & = & 0 & a < 2.5 \\ x & = & 4 & a > 2.5 \\ x & \in & \{0;4\} & a = 2.5 \end{cases}$$

3) $a = 0$ Тогда $y = -10x+5$. y убывает по x, следовательно, чтобы максимизировать y, нужно взять наименьший x: $x = 0$.

Таким образом, общий оптимум выглядит следующим образом (при всех $a \leqslant 0$ оптимумом является $x = 0$):

$$\begin{cases} x & = & 0 & a < 2.5 \\ x & \in & \{0;4\} & a = 2.5 \\ x & = & 4 & a > 2.5 \end{cases}$$

Оптимизация кусочных функций

Оптимизация кусочных функций довольно часто встречается на продвинутых этапах олимпиад, хотя, на самом деле, в ней нет ничего сложного. Запоминайте алгоритм:

Чтобы прооптимизировать кусочную функцию, необходимо отдельно прооптимизировать каждый участок данной функции, найдя соответствующие оптимумы, а затем сравнить значения участков в этих оптимумах.

То есть оптимум будет только на одном из участков функции, в какой-то конкретной точке. Для этого нам нужно понять, какое значение аргумента мы выберем, если окажемся на каждом отдельном участке. Исходя из этого мы и будем выбирать участок. Давайте посмотрим на примере.

Мы будем максимизировать следующую функцию:

$$\begin{cases} y = 10x - x^2 & x < 6 \\ y = 16x - 2x^2 + 2 & x \geqslant 6 \end{cases}$$

Прооптимизируем каждый участок. Начнем с первого: $y = 10x - x^2$. Функция - парабола ветвями вниз, значит, максимум в вершине. Вершина находится в точке $x^* = \frac{-b}{2a} = 5$. $x^* = 5$ удовлетворяет ограничению $x < 6$. Значит максимальное значение функции на этом участке равно $y^* = 25$.

Рассмотрим второй участок. Он также является параболой с ветвями вниз, следовательно, оптимум - в вершине. Найдем вершину: $x^* = \frac{-b}{2a} = 4$. $x^* = 4$ **не** удовлетворяет ограничению $x \geqslant 6$. Значит, оптимальное значение x на это участке будет лежать на том ограничении, которое не выполнилось: $x^* = 6$. Найдем значение функции на этом участке: $y^* = 16 \cdot 6 - 2 \cdot 6^2 + 2 = 26$.

Теперь сравними оптимум на каждом участке, так как мы сами выбираем значение x и, соответственно, какой участок функции использовать. Так как $26 > 25$, то максимум функции достигается на втором участке. Следовательно оптимум функции достигается при $x = 6$.

Оптимизация функций нескольких переменных

Такое тоже иногда встречается, но все реже и реже, так как прослеживается тенденция к дематематизации олимпиадной экономики. И все же, задачи на оптимизацию нескольких переменных все еще можно встретить на заключительных этапах олимпиад.

Если вам стало страшно, то, несмотря на то, что такие задачи считаются довольно сложными, у них также присутствует алгоритм решения:

Для оптимизации функции с несколькими переменными необходимо прооптимизировать функцию сначала по одной переменной, представив другие переменные параметрами, подставить оптимум обратно в функцию, затем прооптимизировать по следующей переменной и так далее по всем переменным.

То есть мы по очереди выбираем оптимальные значения переменных, начиная с последней. Ведь когда мы будем выбирать значение последней переменной, все остальные будут уже выбраны, и оптимизация будет действительно похожа на оптимизацию с параметром.

Давайте проминимизируем следующую функцию с ограничениями:

$$f = x^2 + y^2 - 3xy \quad s.t. \quad -3 \leqslant x \leqslant 3; -1 \leqslant y \leqslant 2$$

Найдем оптимум сначала по x. Относительно x это парабола с ветвями вверх, следовательно, оптимум находится в вершине. $x^* = \frac{-b}{2a} = \frac{3y}{2}$. Проверим оптимум на ограничения:

$$-3 \leqslant \frac{3y}{2} \leqslant 3$$

$$-2 \leqslant y \leqslant 2$$

Выполняется всегда, так как $-1 \leqslant y \leqslant 2$ из условия. Подставим оптимум обратно. Тогда наша функция будет иметь вид:

$$f = \frac{9}{4}y^2 + y^2 - \frac{9}{2}y^2 = -\frac{5}{4}y^2$$

Данная функция является параболой ветвями вниз, значит минимум - на одном из ограничений. Заметим, что вершина нашей параболы находится в точке $y^* = 0$. Ограничение $y = 2$ дальше от вершины, чем $y = -1$, следовательно, минимум достигается при $y = 2$. Тогда оптимальный x равен $x = \frac{3y}{2} = 3$.

Довольно частая ошибка - считать оптимум сразу по двум переменным. Например, данная функция является параболой ветвями вниз сразу по двум переменным. Тогда в минимуме для каждой переменной оптимум выглядит следующим образом: $y = \frac{3x}{2}$, $x = \frac{3y}{2}$. Решив систему из этих двух оптимумумов, получим $x = 0$ и $y = 0$, что не является минимумом данной функции, хотя и удовлетворяет всем ограничениям (можете подставить и проверить).
Это так называемая седловая точка, критическая точка первого порядка. Она даже не является экстремумом. Так что максимизируйте функции по каждой переменной по очереди и будет вам счастье.

Дискретная (целочисленная) оптимизация

Иногда в олимпиадах по экономике можно встретить задачки, которые вас просят решать в целых числах. Оптимизация в таких задач немного отличается для нецелочисленных.

Все довольно просто для линейных функций и парабол: на линейных функциях все вообще остается как раньше, а чтобы найти, например, целочисленный максимум на параболе ветвями вниз, достаточно найти вершину и взять ближайшую к ней целочисленную точку.

Сложнее обстоят дела с другими функциями. Для их анализа в целочисленной оптимизации нам понадобится **дискретная производная**. Для примера рассмотрим минимизацию галочки $f(x) = x + \frac{21}{x}$ на множестве $x > 0$. Дискретной производной в экономике мы называем следующую функцию:

$$f'_d = f(x) - f(x-1)$$

То есть дискретная производная - это значение функции в точке x минус значение функции в точке $x - 1$. Таким образом, дискретная производная показывает, на сколько увеличил функцию каждый конкретный x. Нам будет интересен знак этой производной.

Рассмотрим дискретную производную нашей функции:

$$f'_d = f(x) - f(x-1) = x + \frac{21}{x} - ((x-1) + \frac{21}{x-1})$$

$$f'_d = 1 + \frac{21}{x} - \frac{21}{x-1} = \frac{x^2 - x - 21}{x(x-1)}$$

Заметим, что мы рассматриваем $x > 1$, так как иначе наша дискретная производная просто не имеет смысла (мы будем вычитать что-то, не входящее в область $x > 0$). Тогда знаменатель дроби положителен. Рассмотрим числитель.

Он является параболой с ветвями вверх и вершиной в точке $x^* = \frac{1}{2}$. Получается, для наших значений $x > 1$ числитель возрастает, причем сначала он отрицателен. Тогда существует единственная точка его пересечения с 0 на $x > 1$. Найдем ее:

$$x^2 - x - 21 = 0$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{85}}{2} \approx 5.1$$

Следовательно, если $x < 5.1$, то дискретная производная отрицательная. Это значит, что функция в любой целой точке, где $x < 5.1$ будет меньше, чем значение в предыдущей точке. Если же $x > 5.1$, то функция для этой точки будет иметь большее значение, чем в предыдущей.

Так что же мы имеем? Для точек 1,2,3,4,5 функция все время становится меньше и меньше, но если мы возьмем $x = 6$, то оказывается, что значение функции больше чем в предыдущей, и так будет верно и для любых $x > 6$. Получается, что свое минимальное значение функция принимает при $x = 5$.

Обратите внимание на то, что ближайшая точка к нецелочисленному оптимуму не работает, так как другие функции (помимо параболы) не симметричны относительно вершины!

Монотонные преобразования в оптимизации

Монотонное преобразование - это такая функция, применение которой не меняет промежутки монотонности функции, то есть те участки, на которых функция возрастает либо убывает. Монотонное преобразование всегда выполняется с помощью **строго возрастающей** функции. Например, если прибавить к функции константу, то она не изменит участки, на которых убывает или возрастает. Это значит, что прибавление к функции константы является монотонным преобразованием.

В общем случае, если нам нужно промаксимизировать функцию $g(f(x))$ (с любыми ограничениями), то, если $g(f)$ является возрастающей функцией, то нам достаточно просто промаксимизировать функцию $f(x)$.

Вот вам простой и непростой варианты.

Простой: чтобы промаксимизировать функцию $\frac{-x^2+x}{2}$, нам достаточно промаксимизировать $-x^2 + x$.

Непростой: если нам нужно промаксимизировать функцию $y = (78234758x^2 - 7863x + 67122345)^3$, то здесь можно увидеть $f(x) = 78234758x^2 - 7863x + 67122345$ и $g(f) = f^3$. Так как $g(f) = f^3$ является строго возрастающей функцией, то нам достаточно просто промаксимизировать $f(x) = 78234758x^2 - 7863x + 67122345$. Более того, и эту функцию можно разбить на две: $f^*(x) = 78234758x^2 - 7863x$ и $g^*(f^*) = f^* + 67122345$. Так как $g^*(f^*)$ - строго возрастающая функция, то нам достаточно просто промаксимизировать $f^*(x) = 78234758x^2 - 7863x$.

ВНИМАНИЕ !

Здесь описаны методы оптимизации по одной переменной. Другие вспомогательные методы оптимизации, без которых невозможно будет решать задачки, будут описаны в разделе **Полезность**, так как их разумнее всего изучать уже на практике при решении задач.

Теория потребителя и Полезность

Данный раздел относится к категории индивидуальной оптимизации. Здесь мы рассмотрим алгоритм принятия решений конкретным потребителем и то, на основании чего строится этот алгоритм.

ВНИМАНИЕ!

Здесь и далее мы будем довольно много обсуждать индивидуальную оптимизацию. Сущетвует три основных способа оптимизации: метод основной функции (в простонародье - в лоб), метод предельных функций и метод линий уровня. Эти три метода применяются не только в теории потребителя, но и во всех остальных разделах индивидуальной оптимизации. Однако, описывать эти методы я буду только здесь!

Классическая максимизация полезности

Главное понятие в теории потребителя в олимпиадной экономике - это функция полезности. Потребитель получает некоторое удовольствие от потребляемых товаров. Полезностью потребителя мы называем степень счастья потребителя. Естественно, нам сложно измерить каким-либо образом эту самую степень счастья, но мы считаем, что можно сравнить нашу полезность от различных наборов товаров. Таким образом, мы сможем найти оптимальный набор товаров, максимизирующий нашу полезность.

Рассмотрим самую простую функцию полезности: $U = x + y$, где x и y - количества каких-либо благ, доступных нам для покупки. Например, приобретение 10 товаров y и 10 товаров x принесет нам полезность 20, а приобретение 15 единиц товара y принесет 15 единиц полезности и т.д.

Также у потребителя имеется бюджетное ограничение (если бы никаких ограничений не было, то экономика не была бы наукой). Оно чаще всего (за исключением каких-то супернавороченных случаев), возникает из ограниченного бюджета потребителя и цен товаров, которые тот хочет купить. В общем случае бюджетное ограничение выглядит следующим образом:

$$\sum_{x \in X} xP_x \leqslant I$$

Здесь X - все множество товаров, x - какой-то конкретный товар из этого множества, P_x - цена этого товара (стандартное обозначение от $Price$), I - доход потребителя ($Income$), которым он располагает для покупки этих товаров.

Для тех, кому страшно, держите следующее бюджетное ограничение для двух товаров (обычно оно и используется в задачах):

$$yP_y + xP_x \leqslant I$$

Методы максимизации полезности

Теперь, наконец приступим к обещанным методам оптимизации. В каждом методе, для разнообразия, будем решать разные задачки. Здесь будут приведены максимально развернутые объяснения этих методов, чтобы вы с большей вероятностью их поняли. Приводить все эти объяснения на олимпиадах **не нужно**.

Метод основной функции (в лоб)

Будем решать следующую задачку:

$$U = xy;\ P_x = 2, P_y = 5, I = 100$$

Один раз переведу: Нам необходимо получить как можно большую полезность от покупки товара x и товара y, если наша полезность задается функцией $U = xy$, то есть количества двух товаров домножаются друг на друга (например, если это хлеб и масло), при условии, что x стоит 2 д.е. за штуку, а y - 5 д.е. за штуку, а всего у нас 100 д.е.

Сначала разберемся с бюджетным ограничением. Изначально оно выглядит следующим образом:

$$2x + 5y \leqslant 100$$

Здесь необходимо сказать, остается ли в ограничении неравенство или же оно заменяется равенством. Запоминаем правило:

Если функция полезности нестрого возрастает (не убывает) **хотя бы** по одной переменной, то в бюджетном ограничении выполняется **строгое** равенство. Этот факт необходимо обязательно указывать в решении олмпиадных задач, он прописан во всех критериях.

Это правило выполняется потому, что на любые оставшиеся деньги мы покупаем тот товар, по которому наша полезность возрастает. Таким образом, мы потратим все наши деньги.

В нашем случае видно, что полезность возрастает и по x, и по y. Можно посмотреть также по производным: $U'(x) = y \geqslant 0$, $U'(y) = x \geqslant 0$. Следовательно, наше бюджетное ограничение принимает вид строгого равенства:

$$2x + 5y = 100$$

Метод прямой оптимизации основной функции заключается в том, что мы будем просто максимизировать нашу полезность. Заметим, что в полезности $U = xy$ есть две переменных, которые мы выбираем. Однако, эти две переменные связаны строгим равенством, которым мы обязаны воспользоваться. Выразим из бюджетного ограничения x и подставим в полезность:

$$x = \frac{100 - 5y}{2}$$

$$U = xy = \frac{100y - 5y^2}{2}$$

Здесь все же можно было провести максимизацию по двум переменным с ограничением. Промаксимизируем сначала по x. $U = xy$ является возрастающей линейной функцией по x, так как $y \geqslant 0$. Следовательно, возьмем максимальное значение x, используя ограничение $2x + 5y \leqslant 100$, из которого $x \leqslant \frac{100-5y}{2}$. Следовательно, максимально возможное значение $x = \frac{100-5y}{2}$. Подставив, получим точно такую же функцию $U = xy = \frac{100y-5y^2}{2}$.

У нас получилась функция одной переменной, которую мы можем легко прооптимизировать. Заметим, что для максимизации функции мы можем убрать константы и множители. То есть максимизировать функцию $U = xy = \frac{100y-5y^2}{2}$ то же самое, что и максимизировать функцию $100y - 5y^2$. Это - парабола ветвями вниз, следовательно, максимум в вершине. Вершина: $y^* = 10$. Проверяем на ограничения $y \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$. Второе ограничение сводится к $x = \frac{100-5y}{2} \geqslant 0$. Подставив $y = 10$, получаем, что оба ограничения выполняются. Следовательно, наш оптимум: $y = 10$, $x = \frac{100-5y}{2} = 25$.

Метод предельных функций

Предельные функции - это производные функции от основных функций (они так называются из-за того, что производная является пределом). Данный метод немного сложнее в плане обоснования, зато **значительно проще** в задачах с тремя и более товарами, которые другими методами **практически невозможно** решить. Другими словами, крайне советую пользоваться данным методом в любых задачах на оптимизацию с 3 и более переменными.

В чем же состоит метод? Так как производная - это скорость роста функции, то **производная полезности по какому-либо товару показывает, сколько полезности принесет каждая конкретная единица товара**. Другими словами, производная функции показывает вклад каждого конкретного аргумента в значение функции (то есть на сколько увеличится полезность, если мы купим дополнительную единицу товара).

Рассмотрим следующую задачу:

$$U = 4\sqrt{y} + x;\ P_x = 2, P_y = 4, I = 80$$

Предельная функция в экономике обозначается добавлением буквы M к функции (от слова $Marginal$). Например, MU_x - предельная полезность товара x, то есть производная функции полезности по x. Сейчас у нас:

$$MU_x = 1, MU_y = \frac{2}{\sqrt{y}}$$

Но, на самом деле, нас интересуют не эти величины, а следующие: $\frac{MU_x}{MC_x}$ и, соответственно, $\frac{MU_y}{MC_y}$.

Давайте сначала разберемся, что такое MC_x и MC_y. Мы знаем, что $MC_x = TC'_x$. А что такое TC_x? Если вы хорошо ознакомились с обозначениями, это общие затраты на покупку X. Их можно записать следующим образом: $TC_x = P_x x = 2x$. Тогда $MC_x = P_x = 2$. По сути, предельные затраты на x как раз равны его цене. Ведь предельные затраты - это на сколько увеличатся наши общие затраты, если мы приобретем еще одну единицу x.

Теперь, наконец, разберемся, что такое $\frac{MU_x}{MC_x}$. Если MU_x показывает, **сколько полезности нам приносит каждая единица** x, то $\frac{MU_x}{MC_x}$ показывает, **сколько полезности нам приносит каждая денежная единица, вложенная в** x. Следовательно, анализируя именно эту величину для каждого товара, мы поймем, куда выгоднее вкладывать деньги. Найдем эти величины:

$$\frac{MU_x}{MC_x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{MU_y}{MC_y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Существует два способа оптимизации функции через предельные полезности.

Решение с нулевого случая

Рассмотрим ситуацию, когда мы ничего не покупаем, то есть $x = 0$ и $y = 0$. Тогда $\frac{MU_x}{MC_x} = \frac{1}{2}$, а $\frac{MU_y}{MC_y}$ - бесконечность (делим на 0). То есть для первой маленькой денюжки, вложенной в y, отдача в виде полезности будет практически бесконечной. Даже если мы купим какое-нибудь маленькое количество y (например, 0.01), то отдача от вложенных средств будет довольно большой. Получается, что сначала выгоднее вкладывать наши деньги в y. Но, покупая y, мы снижаем его отдачу ($\frac{1}{2\sqrt{y}}$ уменьшается),и в какой-то момент она сравняется с отдачей от x (которая является константой и не зависит от количества купленных товаров). Давайте посчитаем, когда это произойдет:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$y = 1$$

То есть как только мы купим 1 единицу y, далее выгодно будет покупать только x (так как если мы купим еще y, отдача от него окажется меньше). Купим ли мы 1 единицу y? Да, на это требуется 4 д.е., а их у нас 80. Тогда у нас останется 76 д.е., на которые мы купим 38 единиц x. Итого, наш оптимум - купить $y = 1$ и $x = 38$.

Этот метод решения через предельные полезности довольно популярен, но пользоваться им нужно с осторожностью. Не советую вам решать предельные функции через нулевой случай, так как он может приводить к ошибочным результатам при решении некоторых задач (мы скоро разберем одну из таких). И, тем не менее, это довольно понятный способ, и стоит посмотреть его на различных задачках, чтобы понять, как работает процесс поиска оптимального набора товаров.

Решение через сравнения предельных функций

Данный способ является универсальным и более строгим, чем предыдущий.

Пусть **мы уже купили сколько-то x и сколько-то y**. Тогда мы попадем в одну из ситуаций: либо $\frac{MU_x}{MC_x} > \frac{MU_y}{MC_y}$, либо $\frac{MU_x}{MC_x} \leqslant \frac{MU_y}{MC_y}$.

Если $\frac{MU_x}{MC_x} > \frac{MU_y}{MC_y}$, то, получается, мы что-то сделали неправильно: сейчас мы можем забрать денюжку с покупки y и потратить ее на покупку x, причем, так как отдача у x больше, то наша общая полезность от этого действия вырастет. Последнее, на что нужно посмотреть, - это что произойдет, когда мы перекинем эту денежку.

Итак, мы теперь купим меньше y и больше x, чем раньше. Тогда $\frac{MU_x}{MC_x} = \frac{1}{2}$ не изменится, а $\frac{MU_y}{MC_y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ увеличится. Таким образом, эти две величины станут ближе друг к другу (т.к. изначально $\frac{MU_x}{MC_x} > \frac{MU_y}{MC_y}$, и вторая величина растет, приближаясь к первой). Получается, что мы будем перекидывать деньги с товара y на товар x либо до того момента, когда у нас закончатся y, либо до того момента, когда две отдачи сравняются: $\frac{MU_x}{MC_x} = \frac{MU_y}{MC_y}$. Две отдачи сравняются при $y = 1$, следовательно, все y у нас не закончатся. Тогда у нас останется 76 д.е., на которые мы купим 38 единиц x. Тогда оптимум: $y = 1$ и $x = 38$.

Аналогично для ситуации $\frac{MU_x}{MC_x} \leqslant \frac{MU_y}{MC_y}$ (можете проделать то же самое и убедиться, что единственный оптимум - когда две отдачи равны).

Давайте решим еще одну задачу через два вышеописанных способа:

$$U = x^2 + 5y, P_y = 2, P_x = 3, I = 30$$

Сразу говорим, что бюджетное ограничение имеет вид равенства, так как полезность возрастает и по x, и по y: $2y + 3x = 30$.

Найдем наши предельные отдачи:

$$\frac{MU_x}{MC_x} = \frac{2x}{3}$$
$$\frac{MU_y}{MC_y} = \frac{5}{2}$$

Сначала попробуем решить эту задачу с нулевого случая. Когда мы ничего не покупаем, $\frac{MU_x}{MC_x} = \frac{2x}{3} = 0$, а $\frac{MU_y}{MC_y} = \frac{5}{2}$, то есть вначале нам выгодно вкладываться в y, так как у x нулевая отдача. Когда мы вкладываемся в y, обе отдачи не изменяются, следовательно, нам и дальше выгодно вкладываться в y. Получается, что оптимум: $y = 15$.

Ииии… это неправильный ответ, так как мы не учли, что отдача от x является возрастающей и может превысить значение в $\frac{5}{2}$, если мы начнем закупать «невыгодные» x. Давайте теперь попробуем решить через сравнения:

Пусть $\frac{MU_x}{MC_x} < \frac{MU_y}{MC_y}$, тогда нам выгодно перекинуть денежку с x на y. То есть теперь y увеличится, а x уменьшится. Тогда $\frac{MU_x}{MC_x} = \frac{2x}{3}$ уменьшится, а $\frac{MU_y}{MC_y} = \frac{5}{2}$ не изменится. Получается, теперь нам **тем более** выгодно перекидывать денежки с x на y, ведь отдача от x теперь еще меньше. Таким образом, мы все перекинем на y, то есть купим $y = 15$, как мы и получили в предыдущем способе. **НО!** мы не расмотрели второй вариант.

Если $\frac{MU_x}{MC_x} \geqslant \frac{MU_y}{MC_y}$, то нам выгодно перекидывать денежки уже с y на x. (В случае равенства нам все равно, так что можно и перекинуть). Но тогда все происходит наоборот: так как мы увеличиваем количество x, отдача от него возрастает и нам дальше выгодно также перекидывать на его покупку денежки! Тогда оптимум в этом случае достигается, когда мы тратим все деньги на покупку x, то есть $x = 10$.

Оказывается, у нас в задаче два возможных оптимума. Остается только сравнить их:

$$U_{x=0,y=15} = 75$$

$$U_{x=10,y=0} = 100$$

Получается, что глобальный оптимум - приобрести 10 единиц x. Первый способ с нулевого случая не показал нам этот оптимум. Именно поэтому, в решении через предельные полезности я советую пользоваться вторым способом (через сравнения).

Метод линий уровня

В этом методе мы разберем еще один очень важный в экономике инструмент, который любят современные экономисты, - линии уровня.

Давайте рассмотрим пример, а после попробуем дать определение. Допустим, функция полезности имеет вид $U = xy$. Зафиксируем значение U^*. Тогда в координатах $(x; y)$ функция имеет вид $y = \frac{U^*}{x}$, то есть вид гиперболы. Причем заметим, что чем больше значение U^*, тем выше будет наша гипербола. Таким образом, вот так выглядят линии уровня для нашей функции полезности (в тему «Полезность» такие линии уровня называются **кривыми безразличия**):

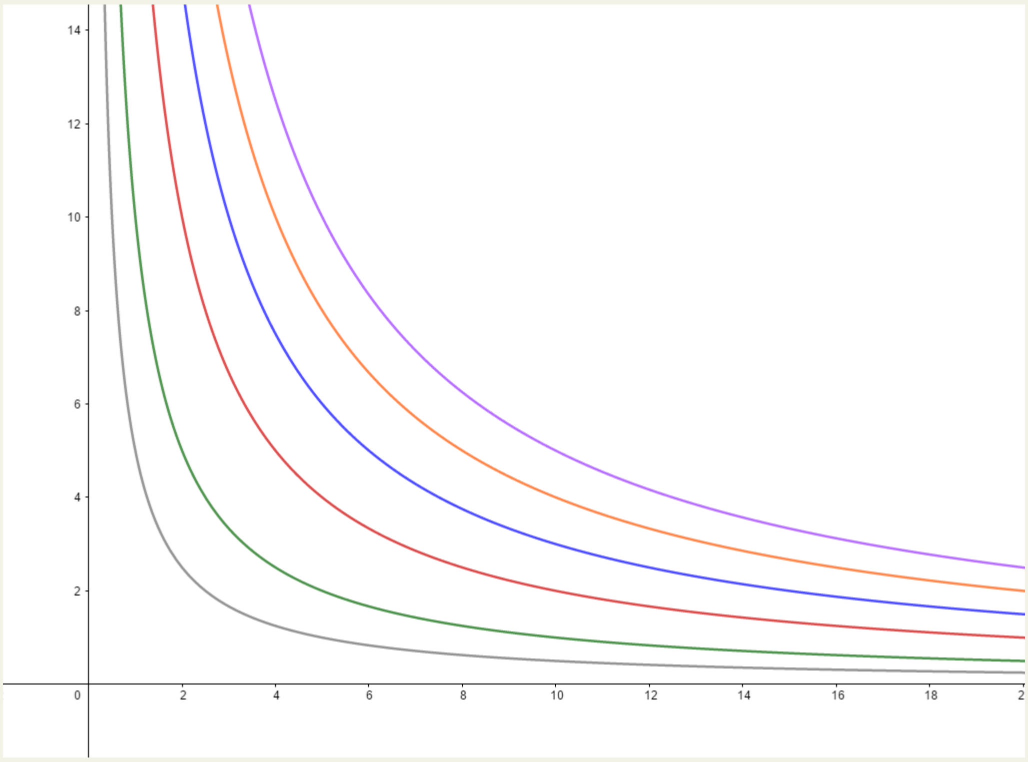


Рис. 27: Линии уровня функции полезности $U = xy$.

Линия уровня – это множество значений аргументов функции, при которых эта функция имеет одно и то же значение.

Так как мы хотим, чтобы наша полезность была как можно больше, то мы хотим оказаться на наиболее высокой из доступных нам линий уровня. Какие же линии уровня нам доступны? Для этого изобразим на том же графике наше бюджетное ограничение. Пусть у нас будет $P_x = 1, P_y = 4, I = 40$. Тогда бюджетное ограничение можно записать как $x + 4y \leqslant 40$. Оно выглядит следующим образом:

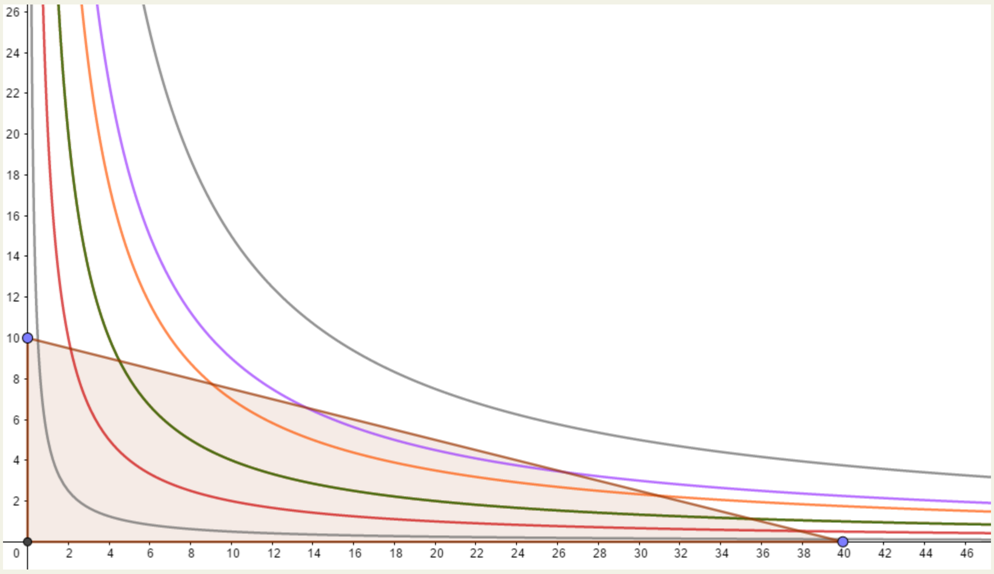


Рис. 28: Бюджетное ограничение с линиями уровня полезности.

Теперь мы должны выбрать точку внутри нашего треугольника, но так, чтобы оказаться на как можно более высокой линии уровня. Заметим, что чем выше линия уровня, тем меньше ее точек лежит внутри нашего треугольника. То есть мы будем подниматься все выше и выше по линиям уровня, **пока у нас не останется всего одна общая точка с бюджетным ограничением**. Получается, что в таком случае наша оптимальная линия уровня будет являться **касательной** к бюджетному ограничению (или, наоборот, бюджетное ограничение - касательная к линии уровня):

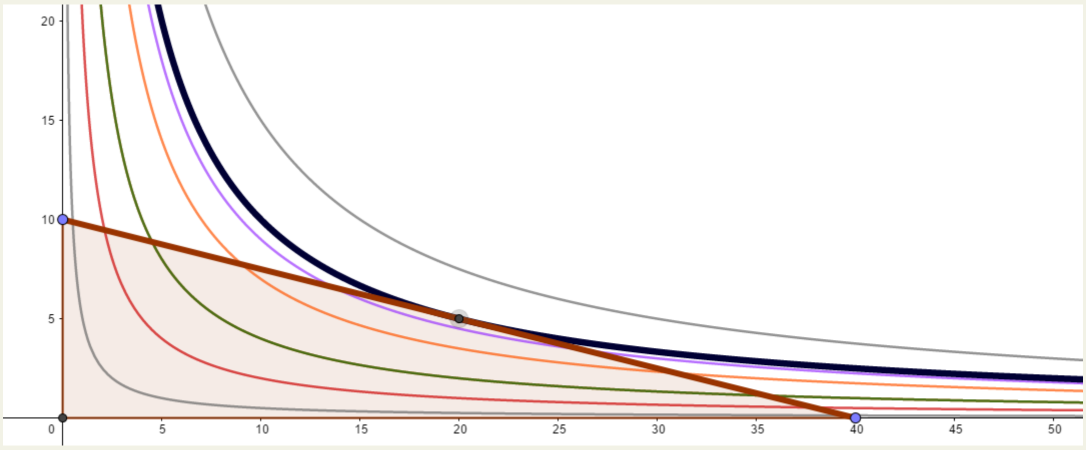


Рис. 29: Оптимум - точка касания.

Осталось найти точку касания. Известно, что в ней производные функций должны быть равны. Линия уровня: $y = \frac{U}{x}$, значит, $y' = -\frac{U}{x^2}$. Бюджетное ограничение: $y = 10 - \frac{1}{4}x$, значит, $y' = -\frac{1}{4}$. Тогда

$$-\frac{U}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

$$x = 2\sqrt{U}$$

$$y = \frac{U}{x} = \frac{\sqrt{U}}{2}$$

Тогда, из бюджетного ограничения:

$$x + 4y = 2\sqrt{U} + 2\sqrt{U} = 40$$

$$U = 100$$

Мы получили, что максимальная полезность, которую можно получить, равна 100. Найдем, сколько каждого товара нужно для этого купить:

$$x = 2\sqrt{U} = 20$$

$$y = \frac{\sqrt{U}}{2} = 5$$

Можете проверить этот оптимум двумя другими способами, чтобы потренироваться. Данный способ значительно лучше остальных для оптимизации **кусочных функций** и используется только в задачах с двумя переменными (так как работа с трехмерными координатами не изучается на достаточном уровне).

Вывод спроса потребителя

Довольно часто производители решают задачу нахождения оптимальной цены своего товара. Для этого необходимо понимать, сколько товара будет куплено, в зависимости от установленной цены. **Эта зависимость количества покупаемого товара от цены этого товара называется спросом потребителя**. Его можно (и нужно) выводить через анализ функции полезности потребителя.

Так как нам нужно получить зависимость, описывающую, сколько единиц товара купит потребитель при **каждом** значении цены, то мы должны задать цену как параметр. Получается, что задача на вывод спроса из полезности представляет собой ни что иное, как оптимизацию функции с параметром.

Давайте разберем пример задачи, в которой нужно найти спрос на товар x:

$$U = 10x - x^2 + y,\ P_y = 5,\ I = 100$$

Так как нам нужно найти спрос на x, то в ответе должна оказаться функция $x = f(P_x)$. P_x нам не задана в условии, поэтому примем ее как параметр.

Будем решать эту задачу в лоб. Бюджетное ограничение является равенством, потому что полезность строго возрастает по y:

$$P_x x + 5y = 100$$

$$y = 20 - \frac{P_x}{5}x$$

Подставим в полезность:

$$U = 10x - x^2 + y = 10x - x^2 + 20 - \frac{P_x}{5}x \xrightarrow{x} max$$

Это парабола ветвями вниз. Вершина: $x^* = \frac{10-\frac{P_x}{5}}{2} = \frac{50-P_x}{10}$

Проверим на ограничения: $x \geqslant 0$ и $x \leqslant \frac{100}{P_x}$. Второе ограничение берется из $y = 20 - \frac{P_x}{5}x \geqslant 0$.

Нас выбивает первое ограничение при $P_x > 50$. Значит, при $P_x > 50$ $x = 0$ (взяли ограничение, которое нас выбило). Проверим второе:

$$\frac{50 - P_x}{10} \leqslant \frac{100}{P_x}$$

$$50P_x - P_x^2 \leqslant 1000$$

Данное неравенство верно при любых P_x. Тогда наш спрос выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x = \frac{50-P_x}{10} & P_x \leqslant 50 \\ x = 0 & P_x > 50 \end{cases}$$

Подставив любое значение цены, мы теперь можем узнать, сколько единиц товара данный потребитель захочет по этой цене купить. Заметьте, если поставить слишком высокую цену, он вообще не будет покупать товар x.

Сложение функций спроса

Довольно часто в задачах встречаются сразу несколько потребителей, имеющих различные функции спроса, и требуется вывести их суммарный спрос. Это довольно просто сделать, но здесь есть одна особенность. Давайте разберемся.

Рассмотрим двух потребителей, имеющих соответствующие функции спроса:

$$Q_1 = \begin{cases} 0 & P \geqslant 10 \\ 10 - P & 5 < P < 10 \\ 5 & P \leqslant 5 \end{cases}$$

$$Q_2 = \begin{cases} 0 & P \geqslant 20 \\ 20 - P & 8 < P < 20 \\ 16 - \frac{P}{2} & P \leqslant 8 \end{cases}$$

Чтобы получить функцию суммарного спроса, главное не запутаться в ограничениях. Когда $P < 5$, мы складываем нижние строчки, когда $5 < P < 8$, мы складываем первую верхнюю со второй нижней и так далее. Таким образом, получаем следующий суммарный спрос:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \begin{cases} 0 + 0 & P \geqslant 20 \\ 0 + 20 - P & 10 \leqslant P < 20 \\ 10 - P + 20 - P & 8 < P < 10 \\ 10 - P + 16 - \frac{P}{2} & 5 < P \leqslant 8 \\ 5 + 16 - \frac{P}{2} & P \leqslant 5 \end{cases} = \begin{cases} 0 & P \geqslant 20 \\ 20 - P & 10 \leqslant P < 20 \\ 30 - 2P & 8 < P < 10 \\ 26 - \frac{3P}{2} & 5 < P \leqslant 8 \\ 21 - \frac{P}{2} & P \leqslant 5 \end{cases}$$

Заметьте, что на некоторых олимпиадах вам могут давать неполные функции спроса (часто в них пропускают нулевые значения). Например, если в условии спрос имеет следующий вид:

$$Q = 100 - P$$

То вам необходимо понимать, что, так как количество товара не может быть отрицательным, на самом деле полная запись такого спроса будет иметь немного другой вид:

$$Q = \begin{cases} 100 - P & P < 100 \\ 0 & P \geqslant 100 \end{cases}$$

Например, вам нужно сложить два спроса, имеющих следующий вид:

$$Q_1 = 120 - P$$

$$Q_2 = 60 - P$$

Писать, что суммарный спрос равен $Q = Q_1 + Q_2 = 180 - 2P$ будет ошибкой. Сначала нужно расписать спросы полностью:

$$Q_1 = \begin{cases} 120 - P & P < 120 \\ 0 & P \geqslant 120 \end{cases}$$

$$Q_2 = \begin{cases} 60 - P & P < 60 \\ 0 & P \geqslant 60 \end{cases}$$

А затем уже сложить их со всеми ограничениями:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \begin{cases} 120 - P + 60 - P & P \leqslant 60 \\ 120 - P + 0 & 60 < P < 120 \\ 0 + 0 & P \geqslant 120 \end{cases} = \begin{cases} 180 - 2P & P \leqslant 60 \\ 120 - P & 60 < P < 120 \\ 0 & P \geqslant 120 \end{cases}$$

Максимизация полезности с комплектами

Задачи на максимизацию полезности с комплектами относятся к довольно сложной категории. Однако, здесь есть несколько приемов, с помощью которых решение можно значительно упростить.

Рассмотрим пример такой задачи:

$$U = xy,\ P_x = 2, P_y = 5,\ I = 100$$

Звучит несложно, но есть небольшое дополнение: мы можем, помимо покупки отдельно x и отдельно y, приобрести комплект, состоящий из трех единиц y и двух единиц x по какой-то цене. Данные комплекты также абсолютно делимы, то есть можно купить половину комплекта за половину цены. Дискретную оптимизацию полезности мы обсудим чуть позже.

Нашей задачей будет найти **спрос покупателя на вышеописанные комплекты**, то есть зависимость количества комплектов, которое купит потребитель, от цены этих комплектов (назовем ее P_k).

Какие интересные случаи могут быть в данной задаче? Для начала заметим, что три y стоят 15, а два x стоят 4. Тогда, если $P_k \leqslant 4$, то покупать комплекты дешевле, чем каждый из товаров по отдельности. Тогда мы будем покупать только комплекты. Следовательно, наш спрос на них при $P_k \leqslant 4$ выглядит как $k = \frac{100}{P_k}$ (это максимальное количество, которое мы можем купить).

Если $4 < P_k \leqslant 15$, то покупать x отдельно уже выгоднее, чем в комплекте, но y все еще нет. Получается, что в данном случае мы **не будем покупать** y **как отдельный товар** (ведь в комплекте он дешевле). Тогда мы будем покупать только x и комплекты. Давайте определим, сколько комплектов мы купим.

Бюджетное ограничение имеет вид равенства, так как полезность возрастает по обоим товарам (x и k):

$$2x + P_k k = 100$$

Но в полезности у нас стоят другие переменные! Там даже x стоит тот, который мы потребим, а в бюджетном ограничении - тот, который мы купим отдельно (а это сейчас - разные вещи). Нам необходимо выразить полезность через переменные, которые стоят в бюджетном ограничении. Сколько x мы в итоге потребим? Вот столько: $x_U = x + 2k$, где x -купленный, а x_U - потребленный. Соответственно, $y_U = 3k$. Тогда:

$$U = x_U y_U = (x + 2k)3k$$

Теперь решим задачу, выразив x из бюджетного ограничения и подставив его в полезность:

$$2x + P_k k = 100$$

$$x = 50 - \frac{P_k}{2}k$$

$$U = (50 - \frac{P_k}{2}k + 2k)3k$$

Эта функция - парабола ветвями вниз. Вершина: $k^* = \frac{25}{\frac{P_k}{2}-2} = \frac{50}{P_k-4}$. Проверим на ограничения $k \geqslant 0$ и $k \leqslant \frac{100}{P_k}$. Первое ограничение выполняется всегда, так как мы рассматриваем $P_k \geqslant 4$. Второе:

$$\frac{50}{P_k-4} \leqslant \frac{100}{P_k}$$

$$50P_k \leqslant 100P_k - 400$$

Получается, что оно выполняется только при $P_k \geqslant 8$. Тогда при $P_k < 8$ мы берем ограничение, которое нас выбило: $k = \frac{100}{P_k}$.

Следующий, довольно простой случай - когда $P_k \geqslant 19$. В этом случае покупать товары по-отдельности выгоднее, чем покупать их в комплекте. Здесь спрос будет таким: $k = 0$.

Остался последний, и самый сложный случай: $15 < P_k < 19$. В этом случае покупка товаров x и y по-отдельности выгоднее, чем в комплекте. Но если потребителю нужна комбинация этих товаров, то лучше брать комплект.

Здесь нам на помощь приходит одно правило: **мы не будем покупать одновременно и x, и y по-отдельности**, так как можем заменить любую их комбинацию комплектом, и это будет дешевле. (Допустим, невыгодно покупать 3 x и 8 y, так как дешевле будет купить 1.5 k и 3.5 y). Из этого следует, что мы будем покупать либо комплекты и x, либо комплекты и y.

Давайте сравним эти два варианта. Для x мы уже проводили оптимизацию: там получалось, что $k = \frac{50}{P_k-4}$ при полезности $U = (50 - \frac{P_k}{2}k + 2k)3k = \frac{3*50^2}{2(P_k-4)}$ (так как мы рассматриваем $P_k > 4$).

Аналогичную максимизацию сделаем для y и k:

$$5y + P_k k = 100$$

$$y = 20 - \frac{P_k}{5}$$

$$U = x_U y_U = 2k(y + 3k) = 2k(20 - \frac{P_k}{5}k + 3k)$$

$$k^* = \frac{50}{P_k - 15}$$

Ограничения: $k \geqslant 0$ верно всегда, так как $P_k > 15$. Проверим $k \leqslant \frac{100}{P_k}$:

$$\frac{50}{P_k-15} \leqslant \frac{100}{P_k}$$

$$50P_k \leqslant 100P_k - 1500$$

$$P_k \geqslant 30$$

А это, оказывается, неверно, так как мы рассматриваем $15 < P_k < 19$. Тогда мы всегда берем выбившее нас ограничение: $k = \frac{100}{P_k}$, то есть покупаем только комплекты. Получается, что $y_U = 3k$, $x_U = 2k$, $U = 6k^2 = \frac{60000}{P_k^2}$. Сравним эту полезность с полезностью, которую мы получаем, если покупаем k и x ($U = \frac{3*50^2}{2(P_k-4)}$), и окажется, что вторая полезность всегда больше, то есть выгоднее покупать $k = \frac{50}{P_k-4}$ (можете самостоятельно удостовериться).

А что если мы можем покупать только комплекты?

Допустим теперь, что мы не можем покупать товары по-отдельности, а только в комплектах. Если существует всего два комплекта, то все довольно просто. Допустим, наша полезность имеет вид $U = xy$. Также допустим, что наш доход равен $I = 100$.

У нас есть выбор из двух комплектов:

1. 2 единицы x и 1 единица y, стоимостью $P_1 = 10$
2. 2 единицы y и 1 единица x, стоимостью $P_2 = 15$

Здесь мы можем выписать бюджетное ограничение (которое выполняется в виде равенства, так как полезность возрастает по каждому товару) и полезность, выраженные через нужные нам переменные, зная что $x = 2k_1 + k_2$ и $y = k_1 + 2k_2$:

$$10k_1 + 15k_2 = 100$$

$$U = (2k_1 + k_2)(k_1 + 2k_2)$$

Мы свели задачу к самой обычной максимизации по двум товарам. Ее даже решать неинтересно, так что делать я этого не буду (а вы можете потренироваться).

Гораздо интереснее, когда нам на выбор дают более двух комплектов. Допустим, при $U = xy$ и $I = 300$ мы можем покупать следующие комплекты:

1. 1 единица x и 4 единицы y по цене $P_1 = 10$
2. 2 единицы x и 3 единицы y по цене $P_2 = 15$
3. 3 единицы x и 1 единица y по цене $P_3 = 20$

Оптимизация здесь будет идти уже по трем переменным, и решение даже через предельные функции будет довольно сложным.

Но и тут нам может помочь один интересный факт! Если нам дано более двух комплектов из двух товаров, то **мы всегда можем собрать один комплект в виде комбинации из двух других**. Это утверждение является следствием теории векторов и линейной алгебры (скорее всего, оно здесь будет немного позже), но фишка в том, что доказывать его и не нужно! Нужно просто сделать.

Как же понять, какой комплект мы можем собрать из двух других? Тот, в котором отношение количества x к y лежит между двумя другими. Давайте посчитаем: в первом комплекте $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$, во втором - $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, в третьем - $\frac{x}{y} = 3$. Посередине лежит второй комплект, значит, его можно собрать из первого и третьего. Если просто сложить первый и третий комплекты, мы получим 4 единицы x и 5 единиц y, что не равно второму комплекту. Поэтому нам нужно дать каждому комплекту какой-то вес, так, чтобы в итоге получился второй комплект.

Пусть вес первого комплекта равен α, а третьего - β. Теперь попробуем собрать из них второй комплект. Тогда количество x и y должны совпасть:

$$\begin{cases} x = \alpha + 3\beta = 2 \\ y = 4\alpha + \beta = 3 \end{cases}$$

Отсюда, $\alpha = \frac{7}{11}$, $\beta = \frac{5}{11}$. То есть, купив $\frac{7}{11}$ первого комплекта и $\frac{5}{11}$ третьего комплекта, мы получим в точности второй комплект (можете проверить). Для чего мы все это делали? Чтобы теперь проверить, что выгоднее: купить второй комплект отдельно, или же собирать его из первого и третьего. Если мы купим его отдельно, то потратим на это 15 д.е.. Если мы скомбинируем его из первого и третьего, то тратим на это $\frac{7}{11} * 10 + \frac{5}{11} * 20 = \frac{170}{11} > 15$. Получается, что собирать второй комплект из первого и третьего не выгодно.

Из этого следующее утверждение: **мы не будем покупать одновременно и первый, и третий комплекты, так как мы можем всегда заменить их комбинацию вторым комплектом и это будет дешевле**. Получается, что мы будем покупать только первый и второй или второй и третий комплекты. Остается рассмотреть эти два случая и сравнить полезности в каждом из них (потренируйтесь сами).

Дискретная оптимизация полезности

Рассмотрим следующую задачу максимизации полезности:

$$U = xy,\ P_x = 2, P_y = 5, I = 30$$

Отличие от предыдущих задач состоит в том, что x и y могут выражаться только целыми числами. В чем же проблема такой оптимизации? В том, что бюджетное ограничение здесь **не** принимает вид равенства. Давайте поймем почему.

Ранее бюджетное ограничение выполнялось как равенство, так как мы всегда могли докупить товар на оставшиеся средства. Таким образом мы тратили все наши деньги. Здесь же это правило не работает, потому что **оставшихся средств может не хватить на покупку дополнительной единицы товара, так как товары целочисленны**. В контексте рассматриваемой задачи, если у нас осталась 1 д.е., то мы больше ничего не сможем больше купить, и наш бюджет будет израсходован не полностью.

Классические методы решения, оказывается, не работают из-за того, что бюджетное ограничение не выполняется как равенство.

Рассмотрим один из способов решения данной проблемы. Он основан на утверждении, что **в оптимуме мы потратим либо 30, либо 29 д.е.**. Это утверждение верно, так как если мы потратим меньше 29 д.е., то у нас останется больше 2 д.е., и на эти деньги мы точно сможем купить единицу x, увеличив нашу полезность. В общем случае это будет выглядеть так: в оптимуме мы потратим $(I - min(P_x; P_y); I]$ д.е.

Таким образом, нам нужно рассмотреть два случая.

1. Если мы тратим все наши деньги, $I = 30$. Тогда бюджетное ограничение имеет вид:

$$2x + 5y = 30$$

Откуда

$$x = 15 - 2.5y$$

Так как x - целый, то y должно быть четным (простейшая теория чисел). Посмотрим на полезность:

$$U = xy = 15y - 2.5y^2$$

Оптимум на этой параболе с ветвями вниз достигается при $y^* = 3$. Ближайшие четные числа - 2 и 4, в них полезности будут равны по свойству параболы. Если $y = 2$, $x = 10$, $U = 20$. Если $y = 4$, $x = 5$, $U = 20$.

2. Рассмотрим второй случай с другим бюджетным ограничением:

$$2x + 5y = 29$$

$$x = 14.5 - 2.5y$$

Отсюда получаем, что y - нечетный. Найдем вершину полезности $U = 14.5y - 2.5y^2$: $y^* = 2.9$. Ближайшее нечетное число $y = 3$, тогда $x = 7$, $U = 21$.

Полезность во втором случае оказалась больше, чем в первом, так что нам выгодно потратить не все наши деньги (29 д.е.) Данный способ хоть и завязан на переборе, что не очень хорошо, но все же помогает довольно быстро решать такие непростые на первый взгляд задачи.

Вывод функции предложения труда индивида

При максимизации полезности можно не только находит спрос на товары, которые пудет потреблять покупатель, но и то, как он будет распределять свое время между отдыхом и работой.

Рассмотрим следующую задачу: некий индивид располагает 16 часами свободного времени в день, которое он может потратить на отдых (l, $leasure$) и на работу (L, $Labor$). Функция его полезности имеет вид $U = \sqrt{c} + \sqrt{l}$, где c – общий уровень потребления, то есть количество заработанных денег ($c = w \cdot L$, где w ($wage$) – зарплата за час работы. Нашей задачей является нахождение функции предложения труда этого индивида, то есть функции $L = f(w)$, показывающую, какое количество часов L в день будет работать индивид в зависимости от ставки заработной платы w.

Данная задача является задачей на оптимизацию, и мы решим ее двумя основными способами: в лоб и через предельные функции. Заметьте, что в каждом случае мы будем использовать следующее ограничение по времени, сдедующее из условия: $L + l = 16$ (оно здесь вместо бюджетного ограничения).

Метод прямой оптимизации

Выразим одну из переменных из ограничения и подставим в полезность:

$$L + l = 16$$

$$l = 16 - L$$

$$U = \sqrt{c} + \sqrt{l} = \sqrt{w \cdot L} + \sqrt{l} = \sqrt{w \cdot L} + \sqrt{16 - L} \xrightarrow{L} max$$

Эту функцию нужно прооптимизировать по L, так как w является параметром по условию. График данной функции не является параболой или еще чем-либо знакомым, так что придется оптимизировать его через две производные:

$$U'_L = \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{L}} - \frac{1}{2\sqrt{16 - L}}$$

$$U''_L = -\frac{\sqrt{w}}{4\sqrt{L^3}} - \frac{1}{4\sqrt{(16 - L)^3}} < 0$$

Вторя производная функции меньше нуля, значит функция полезности имеет график ветвями вниз. Максимум у такого графика в «вершине», то есть там, где первая производная равна 0:

$$U'_L = \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{L}} - \frac{1}{2\sqrt{16 - L}} = 0$$

$$L = \frac{16w}{w + 1}$$

$$l = 16 - L = \frac{16}{w + 1}$$

Вот мы и нашли, сколько будет работать и отдыхать наш индивид в зависимости от ставки зарплаты.

Метод предельных функций

Эту же задачу можно решить, используя уже знакомый нам $\frac{MU}{MC}$. Однако, при наличии ограничения по времени, а не по бюджету, здесь легко запутаться. Давайте распутываться:

При функции полезности $U = \sqrt{w \cdot L} + \sqrt{l}$ и ограничении $L + l = 16$ можно построить все интересующие нас функции:

$$MU_L = \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{L}}$$
$$MU_l = \frac{1}{2\sqrt{l}}$$
$$MC_L = MC_l = 1$$

Заметьте, что и труд, и отдых стоят нам один и тот же час, так что их стоимость я указал равной 1. Так что мы можем сранивать только сами предельные полезности.

Здесь мы можем посмотреть, сходятся или расходятся наши предельные функции. При $MU_L > MU_l$ выгодно больше работать, значит $L \uparrow$, $l \downarrow$. В таком случае $MU_L \downarrow$, $MU_l \uparrow$. Значит та функция, что была изначально больше снижается, а та, что была изначально меньше, растет. Получается, мы будем менять распределение труда и отдыха, пока они не сравняются. Аналогично для изначального $MU_L < MU_l$.

$$\frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{L}} = \frac{1}{2\sqrt{l}}$$
$$L = w \cdot l$$

Теперь можем подставить получившееся оптимальное соотношение между переменными в ограничение и найти их оптимальные значения:

$$w \cdot l + l = 16$$
$$l = \frac{16}{w+1}$$
$$L = \frac{16w}{w+1}$$

Вот так мы находим предложение труда индивида из его функции полезности.

Теория производителя и процесс производства

В данном разделе мы рассмотрим другую сторону рынка - производителей товара. Здесь мы рассмотрим именно процесс производства и связанные с ним задачи, без освещения рынков сбыта и процесса продажи. Так как речь идет о рыночной экономике, во всех задачах производители товара нацелены на получение максимальной прибыли.

Любое дело в экономике начинается с бизнес-плана, состоящего из двух основных позиций: сколько я потрачу (издержки) и сколько я получу (выручка). В данном разделе мы сконцентрируемся именно на издержках. В реальности расчитать издержки оказывается довольно трудно, так как они формируются из множества факторов. В этом разделе мы постараемся понять, что это за факторы и как они формируют функцию издержек фирмы.

Факторы производства и производственная функция

Скорее всего, вы слышали на обществознании, что такое факторы производства, но давайте еще раз:

Факторы производства - это все блага, с помощью которых производятся товары и услуги, и которые не полностью расходуются в процессе производства.

В обществознании выделяют множество факторов производства: и информация, и личные способности человека, и земля. В экономике же принято выделять два фактора производства: труд(L) и капитал(K). Отличить их друг от друга довольно просто: труд - это человеческие усилия (в том числе и умственные), задействованные в процессе производства. Капитал - это какие-либо вещи, использующиеся в процессе производства и **не полностью расходующиеся в этом процессе**. Вещи, которые полностью расходуются в процессе производства, называются **сырьем**. Также довольно часто в капитал включают и **землю**, хотя в обществознании она выступает как отдельный фактор производства.

С помощью труда и капитала мы производим некоторые товары. Процесс производства товара с помощью данных факторов можно отразить некоторой зависимостью. Эта зависимость называется **производственной функцией** данного товара. Рассмотрим пример:

В процессе производства банок участвуют люди и роботы. Каждый человек за день может произвести 20 банок, а каждый робот - 100 банок. Тогда дневная производственная функция банок будет выглядеть как $Q = 20L + 100K$, где Q - итоговое количество банок, L - количество людей, а K - количество роботов.

Рассмотрим пример задачи на вывод производственной фукнции:

У фирмы есть некий штат работников (L), а также некоторое количество арт-объектов (K). Фирма производит Критические Обзоры (Q). Фирма может распределять своих работников на две должности: обзорщики и критики. Если фирма назначает работника обзорщиком, то он пишет обзор **на каждый арт-объект**, который есть у фирмы. Если фирма назначает работника критиком, то он критикует **ровно 10 обзоров, написанных обзорщиками**, в результате получая 10 Критических Обзоров (напомню вам, что все люди, обзоры и т.д. абсолютно делимые величины, то есть половина критика напишет 5 критических обзоров и т.д.). Необходимо сформулировать производственную функцию Критических Обзоров в зависимости от L и K.

Существует метод, позволяющий решать такие задачи на вывод производственной функции: **метод равенств**. То есть нам достаточно выписать все известные равенства и все решится само собой.

Так что же мы знаем?

Первое, что мы можем сказать: количество обзоров и критических обзоров на них должно быть одинаковым. Это довольно просто доказать: если обычных обзоров больше (то есть обзоры как бы простаивают), то нам выгоднее переместить обзорщика (или некоторую его часть) к критикам, и в результате общее количество критических обзоров возрастет. Теперь обозначим некоторые переменные:

Q_o - количество обзоров

L_o - количество обзорщиков

Q_c - количество критики обзоров

L_c - количество критиков

Тогда вот что мы знаем (каждое из равенств довольно легко понять, вы справитесь):

$$\begin{cases} Q_c = 10L_c \\ Q_o = K * L_o \\ Q = Q_o = Q_c \\ L = L_o + L_c \end{cases}$$

Давайте с вами запомним интересный факт:

Если в системе уравнений есть m переменных, и n уравнений (причем, уравнения несократимы, то есть нельзя получить одно уравнение через какие-либо другие уравнения), то:
Если $n > m$, то такая система не имеет решений.
Если $n \leqslant m$, то в этой системе обычно мы всегда можем выразить одну переменную через $m - n$ других переменных (отсюда следует, что если количество уравнений **равно** количеству переменных, то мы сможем найти значение каждой переменной в виде числа).

В нашей системе имеется 7 переменных и 5 уравнений, следовательно, мы сможем выразить одну переменную через две других, а **это нам и нужно!**. Мы как раз сможем найти $Q = f(K, L)$. Попробуйте сами решить систему прежде, чем читать дальше.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

$$\begin{array}{c}.\\.\\.\\.\\.\\.\\.\end{array}$$

$$Q = \frac{10KL}{10 + K}$$

Вот мы и нашли нашу производственную функцию.

Структура издержек фирмы

Три периода

В экономике принято выделять два периода: **долгосрочный**($LR - LongRun$) и **краткосрочный**($SR - ShortRun$).

По определению краткосрочным периодом от настоящего момента времени считается тот период, в котором мы можем изменить количество используемого труда, но не можем изменить количество используемого капитала (здесь предполагается, что труд является более ликвидным фактором производства, как это принято считать в классических моделях, то бишь построить завод гораздо более времязатратно, чем нанять работника). Если же капитал более ликвиден, чем труд (например, капиталом могут быть обычные слесарные инструменты, которые довольно просто купить), то краткосрочным периодом мы будем называть тот, в котором можно изменить количество используемого капитала, но нельзя изменить количество используемого труда.

Долгосрочным периодом называется промежуток времени от настоящего момента, в который можно изменить количество любого фактора производства.

Также есть еще один период, который не входит в классическую теорию, но иногда про него вспоминают: **мгновенный** период, в который мы не можем изменить ни количество используемого труда, ни количество используемого капитала.

Явные и неявные издержки

Прежде всего стоит научиться различать понятия **явных** и **неявных** издержек. Явные издержки (они же называются бухгалтерскими издержками) - это те издержки, которые мы несем из своего кармана, то есть оплачиваем деньгами, которые у нас есть. К ним относятся, например, закупка материалов, выплата зарплат и так далее. Неявные издержки (они же - издержки упущенных возможностей) - это те деньги, которые **мы могли бы получить, но не получили** в результате наших действий. Например, это потенциальная зарплата, от которой мы отказываемся ради открытия своего дела.

Сумма явных и неявных издержек называется **экономическими издержками**. Другими словами, экономические издержки - это все издержки, которые мы несем при производстве, включая все упущенные возможности. В экономике принято оперировать именно экономическими издержками.

Из чего состоят издержки фирмы?

Издержки фирмы складываются из оплаты факторов производства, которые она использует, а также из оплаты ресурсов. Однако, здесь стоит сделать небольшое отступление. Запоминаем очень важную идею:

Все экономические блага, в том числе ресурсы и капитал, произведены с помощью труда. Например, если какую-то деталь делают на станке, то не стоит забывать, что сам станок сделали на заводе, который построили люди, из кирпичей, произведенными людьми, которые произвели люди в печи, построенной с помощью труда и т.д.

Мы же будем считать в задачах и моделях, что затраты фирмы-производителя состоят только из оплаты труда и капитала, если не сказано иного (хотя и это тоже, если что, будет в задачах сказано).

Оплата труда - это, естественно, зарплата ($w - wage$), а вот с капиталом не все так просто. Оплатой за капитал мы называем стоимость его аренды ($r - rent$), причем не важно, принадлежит тебе этот капитал или нет, за него все равно придется заплатить, ведь, как упоминалось ранее, мы рассматриваем **экономические издержки** фирмы. Получается, что даже если у фирмы есть собственный капитал и она использует его в производстве, то теряет те деньги от аренды этого капитала, которые могла бы получать. Таким образом, канонический вид издержек фирмы, использующей в производстве труд и капитал, и закупающей их по фиксированным ценам, имеет следующий вид: $TC = wL + rK$.

Есть множество других вариантов структуры издержек, однако, в задачах это явно прописано.

Виды издержек

Важно понимать, что оплата труда и оплата капитала сильно отличаются друг от друга в плане их учета в краткосрочном периоде. Вспоминаем: в краткосрочном периоде мы не можем изменить количество используемого капитала, но можем изменить количество используемого труда. Тогда оплата капитала становится **постоянными издержками** фирмы, тогда как оплата труда будет **переменными издержками**.

Постоянные издержки фирмы - это те издержки, которые мы будем нести **при нулевом количестве продукции**. Переменные издержки фирмы - это все издержки за вычетом постоянных, то есть те издержки, которые **зависят от количества производимой продукции**.

Еще раз, постоянные издержки - это все издержки при нулевом производстве (и никак иначе):

$$FC = TC(0)$$

В сумме с переменными издержками они дают общие издержки:

$$FC + VC = TC$$

Также мы будем использовать понятие средних издержек. **Средними издержками** называются общие издержки в пересчете на одну единицу товара, то есть:

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$AFC = \frac{FC}{Q}$$

$$AVC = \frac{VC}{Q}$$

Есть еще один вид издержек - **предельные издержки**. Это самый полезный в олимпиадной экономике вид издержек. Предельные издержки показывают, сколько стоит **каждая конкретная единица товара**, или **какой вклад вносит каждая конкретная единица товара в общие издержки**. Предельные издержки вычисляются как производная функции общих издержек, или же производная функции переменных издержек, так как фиксированные издержки являются константой и имеют производную, равную нулю:

$$MC = TC' = (VC + FC)' = VC'$$

Допустим, наши постоянные издержки равны 100 д.е., и на каждую произведенную единицу товара тратится дополнительно 10 д.е. Тогда при производстве пяти единиц товара:

$TC = 100 + 10 * 5 = 150$

$FC = 100$, так как фиксированные издержки не меняются при изменении выпуска.

$AC = \frac{150}{5} = 30$ - в среднем мы потратили 30 д.е. на производство 1 единицы.

$VC = TC - FC = 50$.

$AFC = \frac{FC}{Q} = 20$ - можно заметить, что чем больше мы производим, тем меньше AFC.

$AVC = \frac{VC}{Q} = 10$ - в среднем мы тратим 10 д.е. на производство каждого товара за вычетом постоянных издержек.

$MC = 10$ - мы потратили 10 д.е. на производство пятой единицы товара.

Вывод функции издержек

Получение функции издержек

Задачи на вывод функции издержек довольно популярны на олимпиадах и очень важны в понимании всей олимпиадной экономики. В реальном же бизнес-плане получение функции издержек является одним из самых сложных и важных пунктов, в котором всегда возникают трудности. В общем, каждый производитель хочет понять, сколько будет ему стоить производство конкретного количества продукции.

Итак, давайте для начала посмотрим на фирму, использующую в своем производстве только труд. Допустим, 1 человек может сделать 3 единицы товара. Каждому работнику мы платим зарплату $w = 5$. Задача - вывести функцию издержек в зависимости от количества товара, которое мы хотим произвести, то есть функцию $TC = f(Q)$.

Наша производственная функция будет иметь вид $Q = 3L$ (Количество товара в 3 раза больше количества используемого труда). Функция наших издержек в свою очередь имеет вид $TC = wL = 5L$.

Далее существует два основных способа выражения функции издержек.

1. Замена факторов производства сразу в функции. Это основной метод, который интуитивно понятен, но не всегда подходит в некоторых сложных задачах. Идея состоит в том, что мы просто получаем зависимость фактора производства от Q, и заменяем его в функции издержек. Из производственной функции находим, что $L = \frac{Q}{3}$. Подставим в издержки: $TC = 5L = \frac{5Q}{3}$
2. Второй способ по сути - то же самое, только наоборот. Мы выражаем фактор производства из функции издержек и подставляем в производственную функцию, а затем переворачиваем ее: $L = \frac{TC}{5}$. Тогда $Q = 3L = \frac{3TC}{5}$, откуда $TC = \frac{5Q}{3}$.

В любом случае, мы получили искомую функцию издержек.

Решим еще одну простую задачу данными способами. Теперь производственная функция фирмы будет иметь вид $Q = \sqrt{L}$, причем $w = 10$. Однако, дополнительно фирма тратит по 2 д.е. на обработку каждой единицы продукции. Решаем:

1. Из производственной функции $L = Q^2$. Издержки выглядят сейчас как $TC = wL + 2Q = 10Q^2 + 2Q$.
2. Из издержек выразим L: $L = \frac{TC-2Q}{10}$, подставим в производственную функцию $Q = \sqrt{\frac{TC-2Q}{10}}$, откуда, выражая, получаем ту же функцию $TC = 10Q^2 + 2Q$

Теперь, когда мы научились выводить простые функции издержек, перейдем к более сложным примерам.

Оптимизация функции издержек

Здесь мы рассмотрим ситуацию, когда товар производится с помощью более чем одного фактора производства, что дает производителю **выбор**, как именно ему производить товар, на что тратить деньги и т.д. Таким образом, производитель может **прооптимизировать** свои издержки, то есть выбрать такую стратегию распределения средств на факторы производства, чтобы произвести как можно больше с наименьшими издержками.

Вспоминаем, что есть три основных способа оптимизации, и сейчас мы рассмотрим каждый из них на примере различных задач.

Решение с помощью основной функции (в лоб)

Рассмотрим следующую задачу: производственная функция товара имеет вид $Q = 16\sqrt{K} + L$, $w = 1$, $r = 4$ (напомню r - это стоимость аренды единицы капитала, а w - зарплата), нам необходимо получить функцию издержек фирмы.

Суть оптимизации в лоб заключается в том, что мы выписываем функцию и оптимизируем ее. Осталось только понять, какую именно функцию мы собираемся оптимизировать.

Интуитивный ответ: мы собираемся минимизировать наши издержки для каждого конкретного Q. Выпишем издержки (сейчас мы тратимся только на труд и капитал):

$$TC = wL + rK = L + 4K$$

Далее заметим, что издержки должны зависеть только от Q, а не от L и K. Получить в этой функции Q можно из производственной функции (как мы уже делали раньше):

$$Q = 16\sqrt{K} + L$$
$$L = Q - 16\sqrt{K}$$
$$TC = Q - 16\sqrt{K} + 4K$$

Еще раз, сейчас мы пытаемся понять, как с наименьшими издержками произвести какое-либо фиксированное количество Q, выбирая, сколько каждого фактора нам стоит закупить. Тогда мы можем проминимизировать наши издержки, выбрав оптимальное количество K, и L тогда выразится автоматически из соотношения $L = Q - 16\sqrt{K}$. Итак:

$$TC = Q - 16\sqrt{K} + 4K \xrightarrow{K} min$$

Заметим, что данная функция - парабола ветвями вверх по $\sqrt{K}$ (это можно увидеть, сделав замену $\sqrt{K} = t$). Тогда минимум достигается в вершине:

$$\sqrt{K} = 2$$
$$K = 4$$

Как и любой оптимум, его нужно проверить на ограничения $K \geqslant 0$ и $L \geqslant 0$. Если первое ограничение очевидно выполняется, то из второго следует, что $L = Q - 16\sqrt{K} \geqslant 0$. Проверим:

$$Q - 16\sqrt{4} = Q - 32 \geqslant 0$$

Получается, ограничение верно только при $Q \geqslant 32$. В противном случае мы возьмем максимально близкую к вершине доступную точку. Это как раз будет точка нашего ограничения $L = Q - 16\sqrt{K} = 0$, то есть $K = \frac{Q^2}{256}$.

Тогда наш оптимум:

$$\begin{cases} K = 4 & Q \geqslant 32 \\ K = \frac{Q^2}{256} & Q < 32 \end{cases}$$

Теперь подставим найденное оптимальное значение K в нашу функцию $TC = Q - 16\sqrt{K} + 4K$ и получим нашу оптимальную функцию издержек:

$$\begin{cases} TC = \frac{Q^2}{64} & Q < 32 \\ TC = Q - 16 & Q \geqslant 32 \end{cases}$$

Однако, данный способ не всегда может сработать даже в оптимизации с двумя переменными. Рассмотрим такую задачу:

$Q = KL + \sqrt{KL}, w = 1, r = 4$, нужно вывести функцию издержек фирмы.

В данной ситуации довольно проблематично пытаться выразить один фактор производства из производственной функции, а тем более затем минимизировать издержки по этому фактору. Поэтому нам на помощь приходит второй способ лобовой оптимизации: максимизация произведенного количества при фиксированных издержках. Напомню, в прошлый раз мы минимизировали издержки при фиксированном количестве.

Заметим, что функция $Q = KL + \sqrt{KL}$ является монотонным преобразованием функции $f = KL$ (про монотонные преобразования есть заметка в матаппарате), то бишь, чтобы максимизировать Q достаточно промаксимизировать KL.

Делаем все наоборот: выражаем фактор из издержек и подставляем в KL:

$$TC = L + 4K$$

$$L = TC - 4K$$

$$KL = (TC - 4K)K = TC * K - 4K^2 \xrightarrow{K} max$$

Это парабола ветвями вниз, максимум - в вершине:

$$K = \frac{TC}{8}$$

Проверим ограничения: $K \geqslant 0$ выполняется, $L = TC - 4K = \frac{TC}{2} \geqslant 0$ тоже выполняется, так как $TC \geqslant 0$. Получается, мы нашли оптимум. Подставим обратно:

$$KL = TC * K - 4K^2 = \frac{TC^2}{16}$$

$$Q = KL + \sqrt{KL} = \frac{TC^2}{16} + \frac{TC}{4}$$

Решаем квадратное уравнение $Q = \frac{TC^2}{16} + \frac{TC}{4}$ относительно TC, чтобы найти функцию $TC = f(Q)$ (то есть переворачиваем функцию):

$$TC = 2\sqrt{4Q + 1} - 2$$

Решение с помощью предельных функций

Рассмотрим следующую задачу на выведение функции издержек: $Q = K^2 + L^2, w = 1, r = 4$.

Производная производственной функции по количеству какого-либо фактора производства называется **Предельным продуктом фактора производства** и обозначается как MP. В этих же обозначениях общее количество товара называется **общим продуктом** и обозначается как TP Например, $MP_K = TP'_K = Q'_K = 2K$, $MP_L = Q'_L = 2L$.

В оптимизации же нас будут интересовать величины $\frac{MP_K}{MC_K}$ и $\frac{MP_L}{MC_L}$, где $TC_K = rK$, $TC_L = wL$ а MC_K и MC_L - предельные издержки на капитал и труд. Данные отношения показывают, сколько товара мы получим, если вложим дополнительную денежную единицу в капитал и труд соответственно.

Можно заметить, что сейчас $MC_K = r$ и $MC_L = w$, так как r и w являются константами $(MC_K = TC'_K(K) = (rK)'_K = r)$. Тогда $\frac{MP_K}{MC_K} = \frac{2K}{4} = \frac{K}{2}$, $\frac{MP_L}{MC_L} = \frac{2L}{1} = 2L$.

Приступим к решению: пусть мы купили какое-либо количество труда и капитала так, что $\frac{MP_K}{MC_K} > \frac{MP_L}{MC_L}$. Тогда нам выгодно перебросить денежную единицу с труда на капитал, ведь таким образом мы увеличим количество товара, не изменяя издержки. Вследствие этого $\frac{MP_K}{MC_K} = \frac{K}{2}$ увеличится, а $\frac{MP_L}{MC_L} = 2L$ упадет, и нам станет еще выгоднее перебрасывать деньги с труда на капитал. Таким образом, мы будем перекидывать деньги на капитал до тех пор, пока мы не придем в точку, где покупается только капитал.

Аналогично можно сказать про ситуацию, когда $\frac{MP_K}{MC_K} \leqslant \frac{MP_L}{MC_L}$, только здесь все сойдется к тому, что мы будем покупать только труд.

Итого, у нас есть два вероятных оптимума: производить только с помощью капитала или только с помощью труда.

Если мы производим только с помощью капитала, то:

$$Q = K^2$$
$$K = \sqrt{Q}$$
$$TC = rK = 4K = 4\sqrt{Q}$$

Если мы производим только с помощью труда, то:

$$Q = L^2$$
$$L = \sqrt{Q}$$
$$TC = wL = L = \sqrt{Q} \leqslant 4\sqrt{Q}$$

Получается, что если производить с помощью труда, то издержки всегда меньше. Значит итоговую функцию издержек можно выразить как $TC = \sqrt{Q}$.

Решение с помощью линий уровня

Решим следующую задачу на вывод функции издержек: $Q = KL, w = 1, r = 4$.

Построим необходимые нам линии уровня: линии уровня издержек (изокосты), и линии уровня количества (изокванты).

Сначала запишем их аналитически. Изокосты выводятся из функции издержек $TC = wL+rK = L+4K$, откуда $L_{TC} = TC-4K$. Изокванты выводятся из производственной функции $Q = KL$, откуда $L_Q = \frac{Q}{K}$.

Теперь построим данные линии уровня на графике:

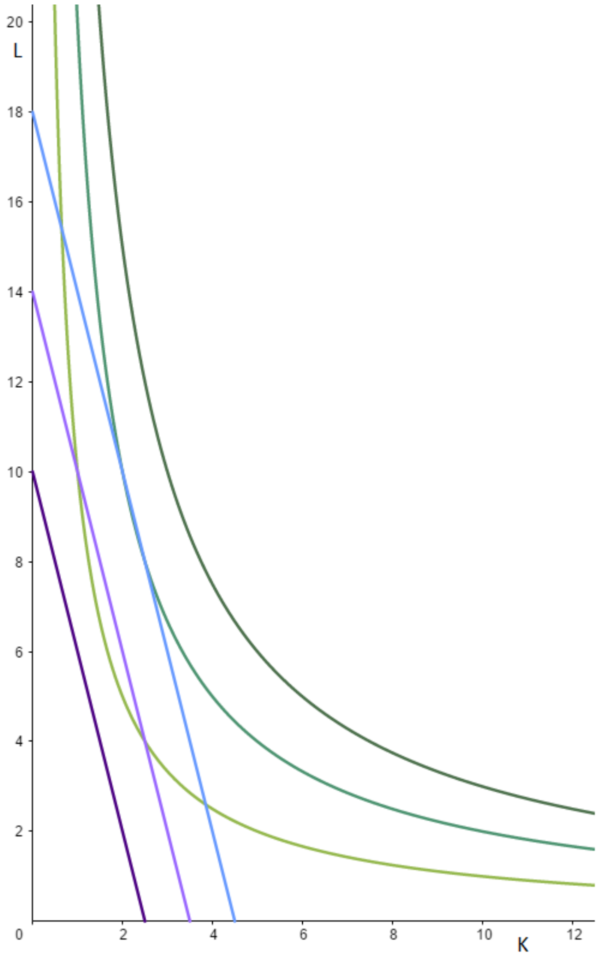


Рис. 30: Изокосты (синие) и Изокванты (зеленые)

При каждой фиксированной изокосте мы хотим найти как можно более высокую изокванту, имеющую с изокостой хотя бы одну точку пересечения. Из графика видно, что это будет точка их касания:

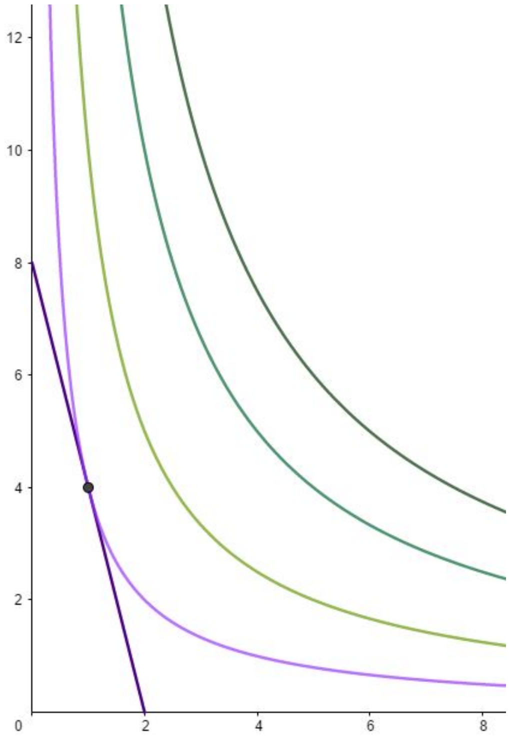


Рис. 31: Оптимум - точка касания

Тогда в точке касания должно быть выполнено свойство касательной: производная изокосты должна быть равна производной изокванты.

Производная изокванты называется **предельной нормой замещения** (MRS – $Marginal\ Rate\ of\ Substitution$), и показывает, сколько единиц одного фактора производства нужно, чтобы заместить единицу другого фактора производства.
Например, если мы возьмем производную изокванты $L'_Q(K)$, то эта величина будет равна $-MRS_K$ и будет показывать, сколько труда нам придется использовать, чтобы при отказе от одной единицы капитала итоговое количество продукции осталось тем же с точностью до знака (так как мы заменяем один фактор другим, то производная будет отрицательна).

Производная же изокосты - это всегда относительная цена фактора производства. Например, производная изокосты $L'_{TC}(K)$ покажет, сколько труда мы сможем купить вместо одной единицы капитала, то есть при фиксированной стоимости труда и капитала верно, что наклон изокосты равен $L'_{TC}(K) = -\frac{r}{w}$

Давайте найдем точку оптимума. (Заметим, что функцией на графике у нас сейчас является L, а аргументом - K, то есть мы будем искать $L'(K)$):

$$L'_{TC} = -\frac{r}{w} = (TC - 4K)' = -4$$

$$L'_Q = -MRS_L = (\frac{Q}{K})' = -\frac{Q}{K^2}$$

$$-4 = -\frac{Q}{K^2}$$

$$K = \frac{\sqrt{Q}}{2}$$

$$L = \frac{Q}{K} = 2\sqrt{Q}$$

$$TC = L + 4K = 2\sqrt{Q} + 2\sqrt{Q} = 4\sqrt{Q}$$

Задача решена.

Несколько этапов производства

Иногда можно встретить задачи, в которых процесс производства происходит не мгновенно, а в несколько этапов. Опять же, давайте на примере задачи разберем, как выводить в этом случае функцию общих издержек.

Некоторая фирма используется труд как единственный фактор производства. Работники формируют заготовки согласно производственной функции $Q_z = \sqrt{L}$, где Q_z - количество заготовок. Затем из заготовок создается конечный продукт производства(Q). Из одной заготовки получается 5 продуктов, а также для каждой заготовки нужно докупить дополнительных комплектующих на 10 д.е. Зарплата рабочих $w = 1$. Необходимо вывести функцию общих издержек фирмы в зависимости от итогового количества продукции.

Первое, что нужно сделать при решении задач на построение функции издержек - это правильно выписать ту самую функцию издержек в изначальном виде. Какие затраты несет фирма? Она оплачивает труд рабочих и закупает комплектующие для заготовок. Каждому работнику платится зарплата $w = 1$, а на каждую заготовку тратится 10 д.е. Тогда:

$$TC = wL + 10Q_z = L + 10Q_z$$

Если вы смогли правильно выписать функцию издержек, то дальнейшее - дело техники. Заметьте, что в этой задаче не нужно ничего оптимизировать, так как фирма не влияет на процесс производства и не выбирает, каким именно образом распределять средства.

Осталось только выписать соотношения таким образом, чтобы функция издержек зависила только от Q, то есть мы хотим выразить L и Q_z через Q. Выпишем известные нам соотношения:

$$Q_z = \sqrt{L}$$
$$L = Q_z^2$$

$$Q = 5Q_z$$
$$Q_z = \frac{Q}{5}$$

Теперь нам осталось только подставить значения в TC и получить функцию издержек!

$$TC = L + 10Q_z = Q_z^2 + 10Q_z = \frac{Q^2}{25} + 2Q$$

Оптимизация на нескольких заводах

Оптимизация производственной функции на нескольких заводах

Оптимизация производственной функии - дело обычно не особо легкое, но сейчас мы с вами попробуем в этом разобраться. Мы рассмотрим классические задачи, в которых нужно будет распределить имеющиеся факторы производства по заводам с целью получения максимального выпуска.

Допустим, у нас есть два завода со следующими производственными функциями:

$$Q_1 = 4K_1 + 3L_1$$
$$Q_2 = 8K_2 + 2L_2$$

K_1 И L_1 показывают, соответственно, количество капитала и труда, используемое на первом заводе, а K_2 и L_2 - на втором. Задача состоит в том, чтобы вывести общую производственную функцую. Давайте решим данную задачу всеми тремя способами оптимизации:

Решение основной функцией (в лоб)

Нашей основной функцией является Q - мы максимизируем итоговое произведенное количество. Выпишем функцию:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 4K_1 + 3L_1 + 8K_2 + 2L_2$$

Заметим, что нам нужна функция $Q = f(K, L)$, то есть от итоговых количеств труда и капитала. Их мы можем выразить из нехитрых выражений:

$$L = L_1 + L_2$$

$$K = K_1 + K_2$$

Далее, выразим первое или второе количество каждого фактора и заменим его в нашей основной функции, чтобы ввести нужные переменные:

$$L_1 = L - L_2$$

$$K_1 = K - K_2$$

$$Q = 4K_1 + 3L_1 + 8K_2 + 2L_2 = 4(K - K_2) + 3(L - L_2) + 8K_2 + 2L_2 = 4K + 3L + 4K_2 - L_2$$

Так как задача перед нами стоит оптимизационная (мы выбираем, на каком заводе использовать наши факторы производства), то мы будем оптимизировать нашу функцию по L_2 и K_2, таким образом определяя, сколько каждого фактора мы отправим на первый завод, а сколько - на второй.

Обычно это оптимизация по двум переменным, что усложняет дело, но не делает задачу нерешаемой, но в нашем случае из-за простоты условия переменные оказываются не связанными друг с другом.

Заметим, что по K_2 это строго возрастающая функция, значит, мы хотим как можно большее K_2, удовлетворяющее условиям $0 \leqslant K_2 \leqslant K$. В таком случае мы берем $K_2 = K$.

По L_2 это строго убывающая функция, то есть мы хотим взять наименьшее значение L_2, удовлетворяющее ограничениям $0 \leqslant L_2 \leqslant L$. Это $L_2 = 0$.

Подставим наши найденные оптимумы обратно и получим нашу итоговую производственную функцию:

$$Q = 4K + 3L + 4K_2 - L_2 = 8K + 3L$$

Решение через предельные функции

В данном случае решение через предельные функции будет значительно проще. Рассмотрим предельные продукты труда на каждом заводе:

$$MPL_1 = 3$$

$$MPL_2 = 2$$

Так как 3>2, то труд на первом заводе всегда более продуктивен, чем на втором. Значит, весь труд мы будем отправлять на первый завод. Аналогично, весь капитал мы будем оправлять на второй. Тогда мы берем производственную функцию труда с первого завода и капитала - со второго, и в итоге:

$$Q = 8K + 3L$$

Решение с помощью линий уровня неприменимо в случае максимизации по двум переменным, так что его я приводить не буду.

Оптимизизация издержек на нескольких заводах

Это самый классический вид задач, связанных с процессом производства. В этой секции мы будем выбирать, как распределить то количество товара, которое мы хотим произвести, между несколькими заводами.

Рассмотрим следующую задачу: фирма имеет два завода, функции издержек на которых задаются следующим образом:

$$TC_1 = Q_1^2 + 30Q_1$$
$$TC_2 = 2Q_2^2 + 100$$

Фирма сама решает, где сколько продукции произвести. Нужно определить функцию общих издержек фирмы (то есть зависимость общих издержек от общего объема производства $TC(Q)$).

Так как эта задача оптимизационная, применим известные нам средства оптимизации:

Решение основной функцией (в лоб)

Выпишем функцию издержек:

$$TC = TC_1 + TC_2 = Q_1^2 + 30Q_1 + 2Q_2^2 + 100$$

Далее применим обычный прием: заменим $Q_2 = Q - Q_1$:

$$TC = Q_1^2+30Q_1+2(Q-Q_1)^2+100 = 3Q_1^2+30Q_1-2QQ_1+2Q^2+100 = 3Q_1^2+(30-4Q)Q_1+2Q^2+100 \xrightarrow{Q_1} min$$

Функция является параболой ветвями вверх, значит минимум находится в вершине:

$$Q_1^* = \frac{4Q-30}{6} = \frac{2Q-15}{3}$$

Проверяем оптимум на ограничения $0 \leqslant Q_1 \leqslant Q$: $\frac{2Q-15}{3} \leqslant Q$ верно всегда, тогда как $\frac{2Q-15}{3} \geqslant 0$ Верно только при $Q \geqslant 7.5$.

При $Q < 7.5$ мы возьмем ограничение, которое нас выбило (ближайшую точку к вершине): нас выбило ограничение $Q_1 \geqslant 0$, значит при $Q < 7.5$ $Q_1 = 0$.

Подставив получившиеся значения Q_1 обратно в функцию издержек, получаем:

$$TC = \begin{cases} 2Q^2 + 100; & Q < 7.5 \\ -\frac{(2Q-15)^2}{3} + 2Q^2 + 100; & Q \geqslant 7.5 \end{cases}$$

Решение с помощью предельных функий

Рассмотрим ту же задачу. Найдем предельные издержки на каждом заводе:

$$MC_1 = 2Q_1 + 30$$
$$MC_2 = 4Q_2$$

Выберем какое-либо распределение между заводами и рассмотрим все возможные ситуации, которые могли получиться.

Если $MC_1 > MC_2$, то фирме выгодно перекинуть товар с первого завода на второй, так как там ниже издержки. Тогда Q_1 уменьшится, а Q_2 вырастет, из-за чего MC_1 уменьшатся, а MC_2 вырастут. Таким образом, $\downarrow MC_1 > MC_2 \uparrow$, и фирме выгодно перекидывать товар до того момента, пока либо на 1 заводе он не закончится, либо достигнется равенство $MC_1 = MC_2$. Аналогично можно сказать про ситуацию, когда $MC_1 < MC_2$.

Найдем, когда выполняется равенство:

$$2Q_1 + 30 = 4Q_2$$

$$Q_1 = 2Q_2 - 15$$

Учитывая, что $Q_1 + Q_2 = Q$, найдем $Q_1(Q)$ и $Q_2(Q)$:

$$Q_2 + Q_1 = Q_2 + 2Q_2 - 15 = Q$$
$$Q_2 = \frac{Q+15}{3}$$
$$Q_1 = Q - Q_2 = \frac{2Q-15}{3}$$

Проверим на ограничения $Q_1 \geqslant 0$ и $Q_2 \geqslant 0$. Они выполняются только при $Q \geqslant 7.5$. Значит, при $Q < 7.5$ равенство $MC_1 = MC_2$ недостижимо. Следовательно, одни MC всегда выше других. Так как в равенстве не выполняется ограничение именно на Q_1, то при $Q < 7.5$ фирма будет производить только с помощью второго завода.

Таким образом, наши оптимумы:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = Q \end{cases} & Q < 7.5 \\ \begin{cases} Q_1 = \frac{2Q-15}{3} \\ Q_2 = \frac{Q+15}{3} \end{cases} & Q \geqslant 7.5 \end{array} \right.$$

Подставим полученные значения в функцию $TC = TC_1 + TC_2 = Q_1^2 + 30Q_1 + 2Q_2^2 + 100$, получив уже знакомый результат:

$$\begin{cases} TC = 2Q^2 + 100; & Q < 7.5 \\ TC = -\frac{(2Q-15)^2}{3} + 2Q^2 + 100; & Q \geqslant 7.5 \end{cases}$$

Решение с помощью линий уровня

Для данного способа нам необходимы уже знакомые **изокванты** и **изокосты**. Изокванта показывает множество комбинаций переменных, которые дают одно и то же количество товара, а изокоста показывает множество комбинаций переменных, которые дают одни и те же издержки. Напомню, линии уровня строятся в координатах переменных, по которым мы оптимизируем: Q_1 и Q_2. Изокванта здесь выглядит довольно просто: $Q_1 = Q - Q_2$. теперь найдем уравнение изокосты, преобразовав функцию издержек $TC = Q_1^2 + 30Q_1 + 2Q_2^2 + 100$.

Для того, чтобы получить необходимую функцию, необходимо решить квадратное уравнение относительно Q_1. Решив его, получаем:

$$Q_1 = \sqrt{TC - 2Q_2^2 + 125} - 15$$

Проанализируем данную функцию, чтобы понять, как выглядит ее график.

$$Q_1' = \frac{-2Q_2}{\sqrt{TC - 2Q_2^2 + 125}} < 0$$

$$Q_1'' = \frac{-2(TC + 125)}{\sqrt{(TC - 2Q_2^2 + 125)}^3} < 0$$

Таким образом, перед нами вогнутая убывающая функция. Теперь нанесем примерное расположение изокосты и изокванты на графике. Заметьте, я не буду строить именно данный функции с помощью специальных программ, а буду действовать как на олимпиаде, зная только их вид: прямая с наклоном (-1) и вогнутая убывающая функция:

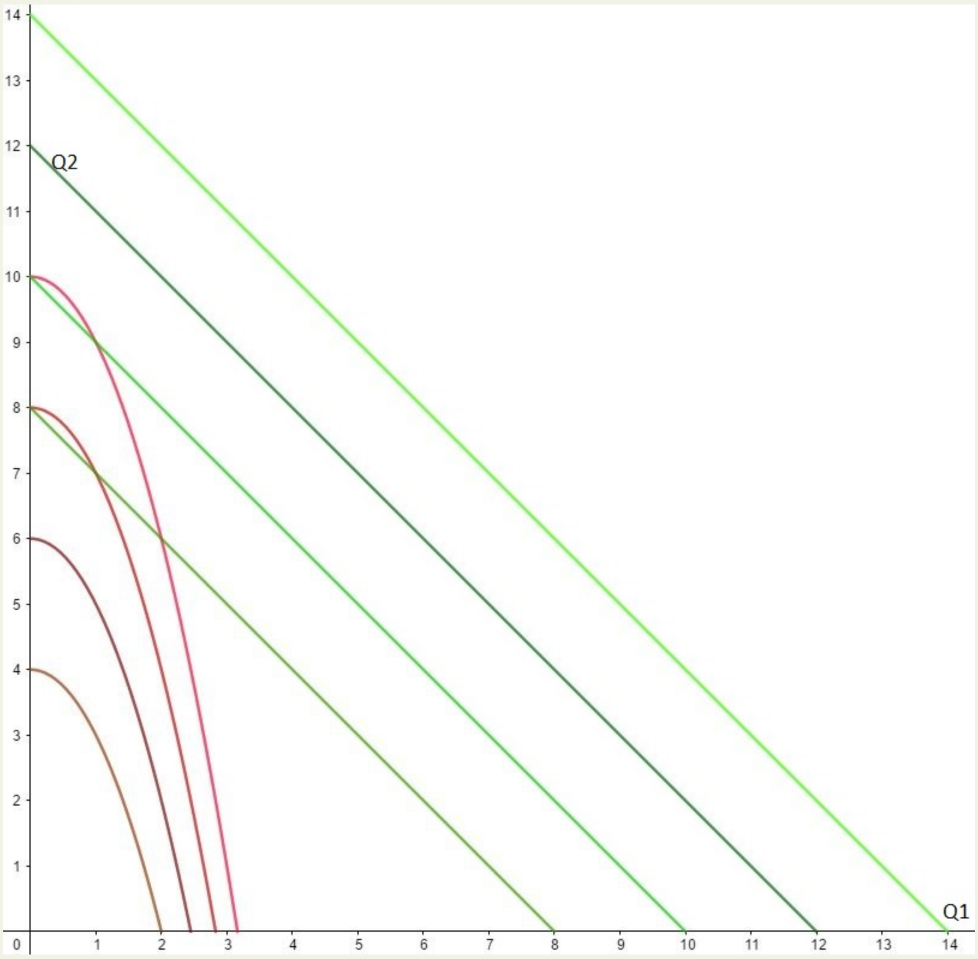


Рис. 32: Изокосты и изокванты

Для удобства зафиксируем изокванту и будем двигать изокосту. Таким образом, Мы фиксируем количество товара и хотим найти минимальный уровень издержек, при котором можно его достигнуть: будем двигать изокосту вверх пока не достигнем нужного количества хотя бы в одной точке:

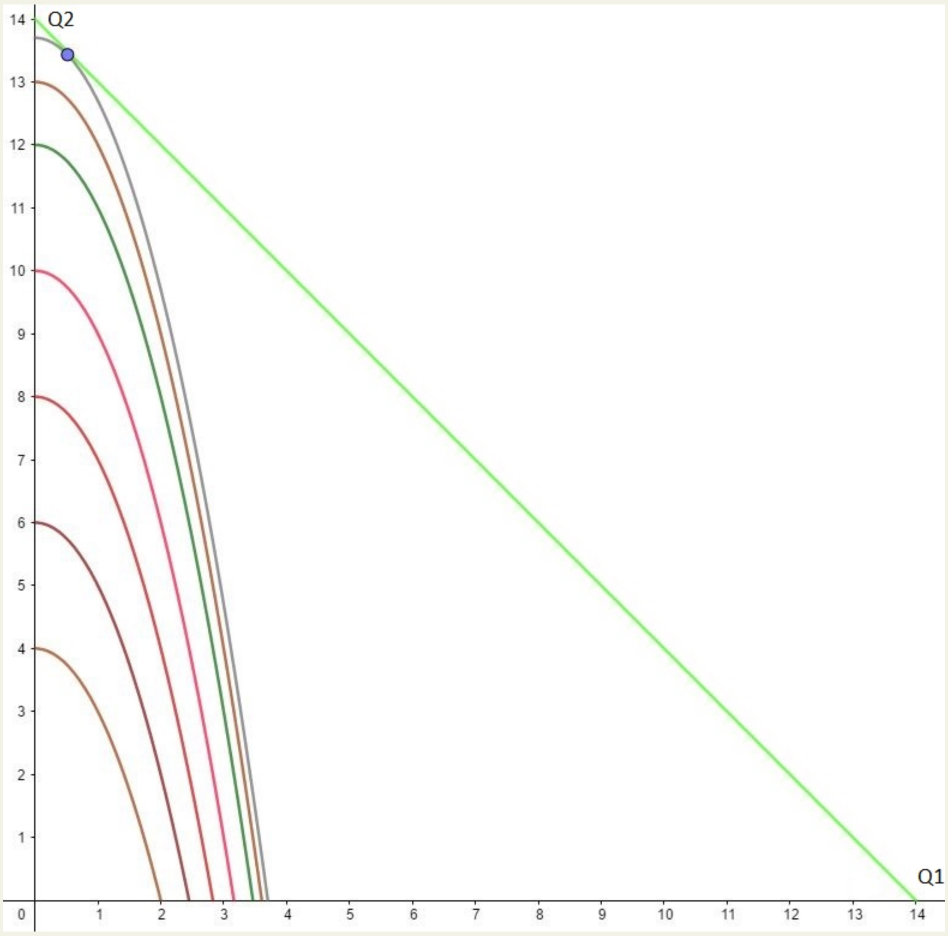


Рис. 33: Точка оптимума в касании

Таким образом, мы видим, что оптимум будет находиться именно в точке касания. Давайте ее найдем. Для этого в данной точке по определению касательной должны быть равны как сами функции, так и их производные:

$$\begin{cases} \frac{-2Q_2}{\sqrt{TC-2Q_2^2+125}} = -1 \\ \sqrt{TC-2Q_2^2+125} - 15 = Q - Q_2 \end{cases}$$

Из данной системы мы можем найти, что $Q_2 = \frac{Q+15}{3}$, тогда $Q_1 = \frac{2Q-15}{3}$. Оказывается, что при $Q < 7.5$ одна из координат (Q_1) отрицательная. Таким образом, касание происходит за пределами области определения, и впервые изокоста коснется изокванты в «угловом» случае:

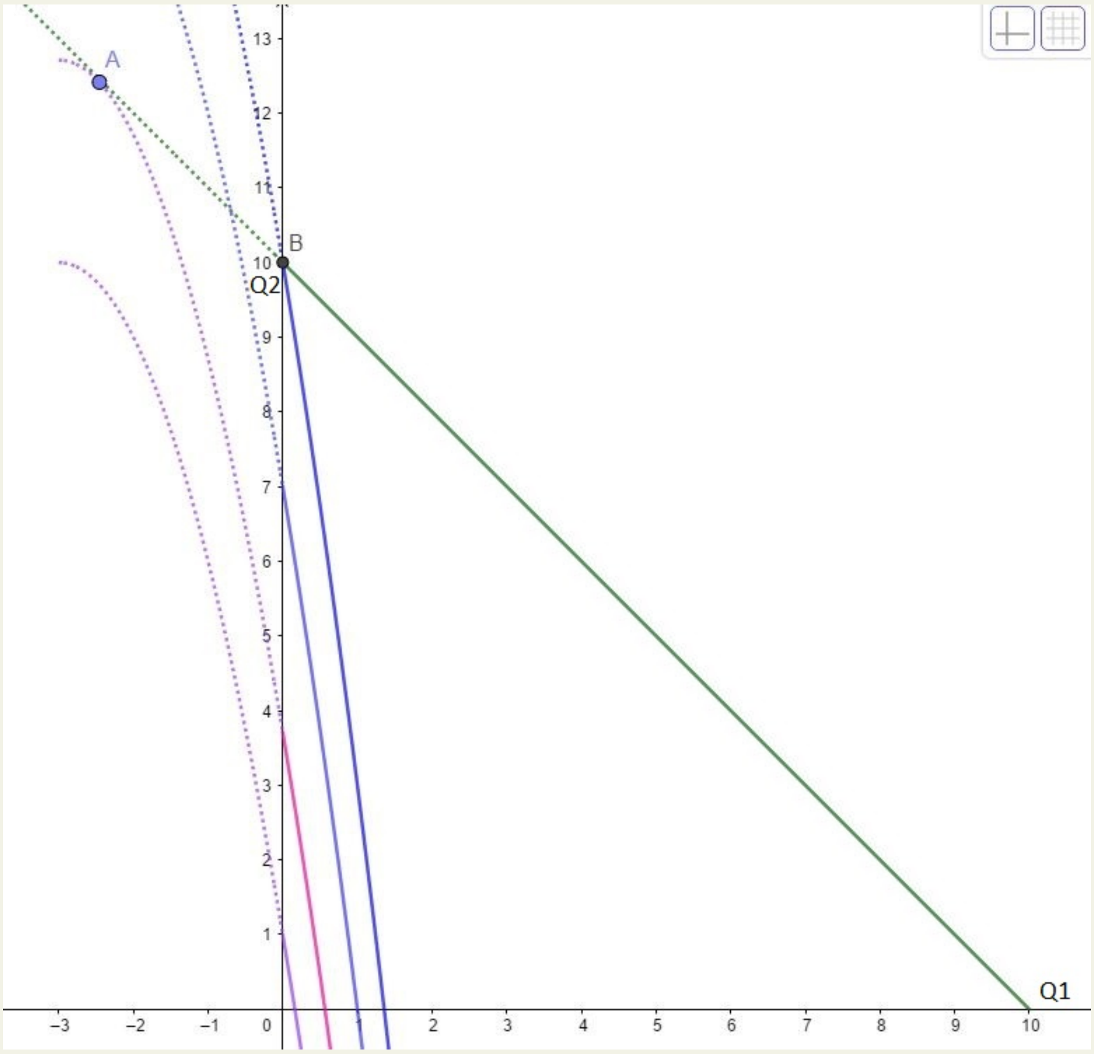


Рис. 34: A - точка касания, B - точка оптимума

В таком случае оказывается, что в оптимуме $Q_1 = 0$. В итоге, мы снова пришли к следующим точкам оптимума:

$$\begin{cases}\begin{cases}Q_1 = 0\\ Q_2 = Q\end{cases} & Q < 7.5\\ \begin{cases}Q_1 = \frac{2Q-15}{3}\\ Q_2 = \frac{Q+15}{3}\end{cases} & Q \geqslant 7.5\end{cases}$$

Откуда, подставляя полученные значения в функцию общих издержек, получаем:

$$\begin{cases}TC = 2Q^2 + 100; & Q < 7.5\\ TC = -\frac{(2Q-15)^2}{3} + 2Q^2 + 100; & Q \geqslant 7.5\end{cases}$$

Общая теория издержек

Канонические функции

Теперь, когда мы научились оптимизировать издержки фирмы, обратимся к общей теории издержек: их соотношениям и нескольким интересным фишкам, которые должен знать каждый олимпиадник.

Обратите внимание на следующий график:

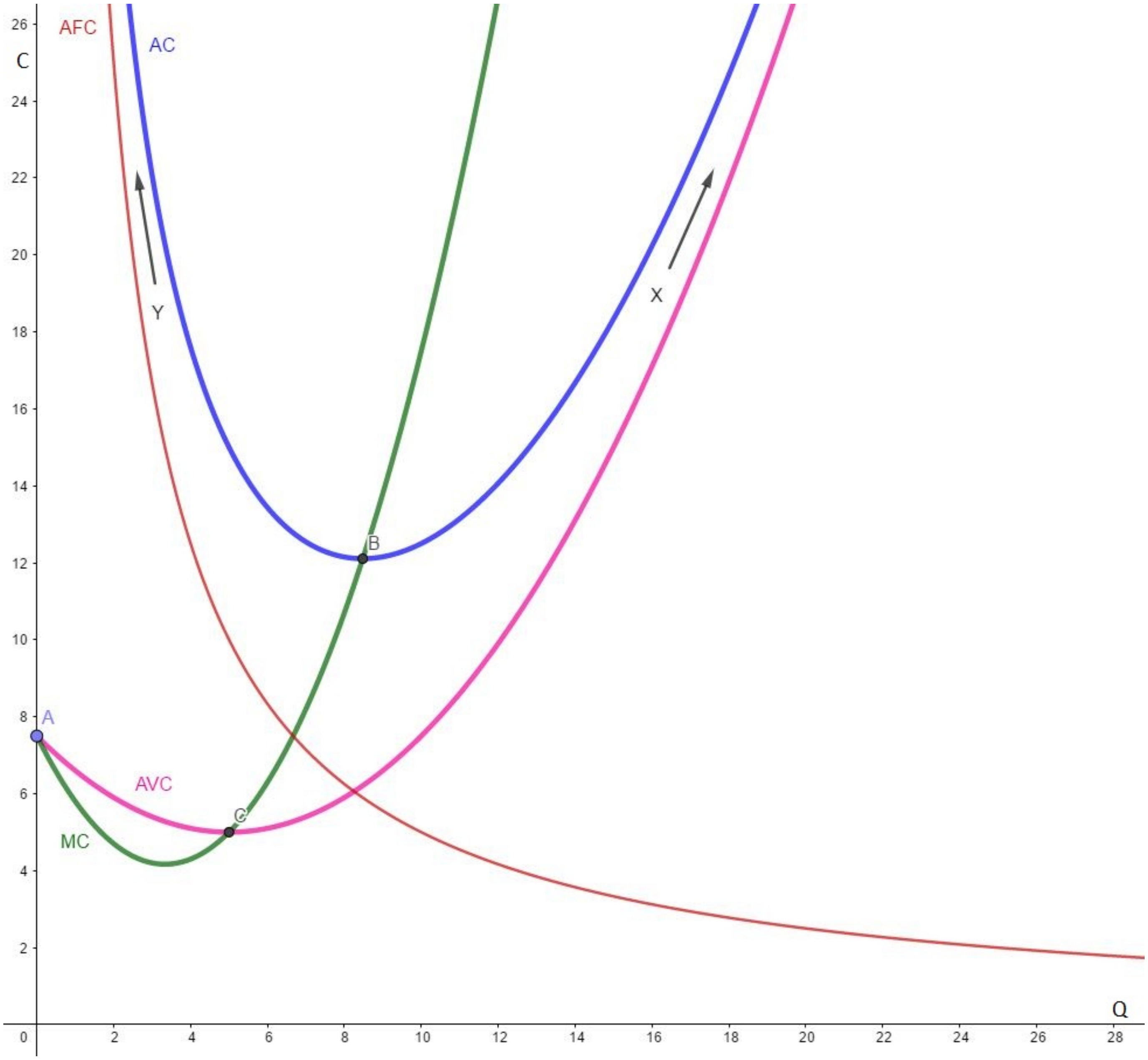


Рис. 35: Канонический вид графиков издержек

Перед вами так называемый канонический вид издержек. Здесь представлены графики **Средних издержек** (AC), **Средних переменных издержек** (AVC), **Средних постоянных издержек** (AFC), а также **Предельных издержек** (MC).

Рассмотрим интересные факты, связанные с этим графиком.

Во-первых, **предельные и средние переменные издержки всегда начинаются из одной точки** (на графике это точка A). Почему же так происходит?

Предельные издержки показывают нам, сколько стоит каждая конкретная единица товара. Средние переменные издержки нам показывают, сколько в среднем стоит произвести какое-то количество единиц товара. В точке A оказывается, что **самая первая** единица товара (предельная, если мы берем недискретный случай), стоит в производстве столько же, сколько в среднем стоит одна единица товара. Таким образом, на первой единице предельные и средние переменные издержки оказываются численно равны.

Математически: $AVC = \frac{VC}{Q}$, $MC = \frac{\delta VC}{\delta Q}$ (определение производной). В нашем же случае $Q = \delta Q$, $VC = \delta VC$, так что две данные величины оказываются равны.

Во-вторых, **предельные издержки проходят через экстремумы функций средних и средних переменных издержке**, в нашем случае это минимумы (точки B и C).

Это происходит потому, что пока предельная функция ниже средней (то есть когда каждую следующую единицу мы делаем дешевле, чем в среднем), то среднее падает. Когда же предельная функция становится больше средней, то среднее растет. Тогда получается, что предельная функция проходит через минимум средней.

Математически: в экстремуме средней функции верно, что:

$$AVC' = (\frac{VC}{Q})' = 0$$

$$\frac{VC' * Q - VC * Q'}{Q^2} = 0$$

Так как мы берем производную по Q, то $VC' = MC$, $Q' = 1$:

$$MC * Q - VC = 0$$

$$MC * Q = VC$$

$$MC = \frac{VC}{Q} = AVC$$

Получили, что в экстремуме средних перемнных издержек они равны предельным.

В-третьих, когда $Q \to 0$, то $AFC \to AC$ (Стрелочка Y на графике). Так как $AC = AVC + AFC$, причем $AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{Const}{Q}$, то есть когда $Q \to 0$, то $AFC \to \infty$, и, следовательно, $AC = AVC + AFC \to \infty$. Таким образом, когда $Q \to 0$, то AC и AFC сходятся в бесконечность.

В-четвертых, когда $Q \to \infty$, то $AVC \to AC$ (Стрелочка X на графике). Так как $AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{Const}{Q}$, то когда $Q \to \infty$, то $AFC \to 0$. Получается, что одна часть $AC = AFC + AVC$ сремиться к 0. Таким образом, становиться верно, что при $Q \to \infty$ $AC \approx AVC$.

Все то же самое можно сказать и про другие функции, например, про функцию продуктов труда:

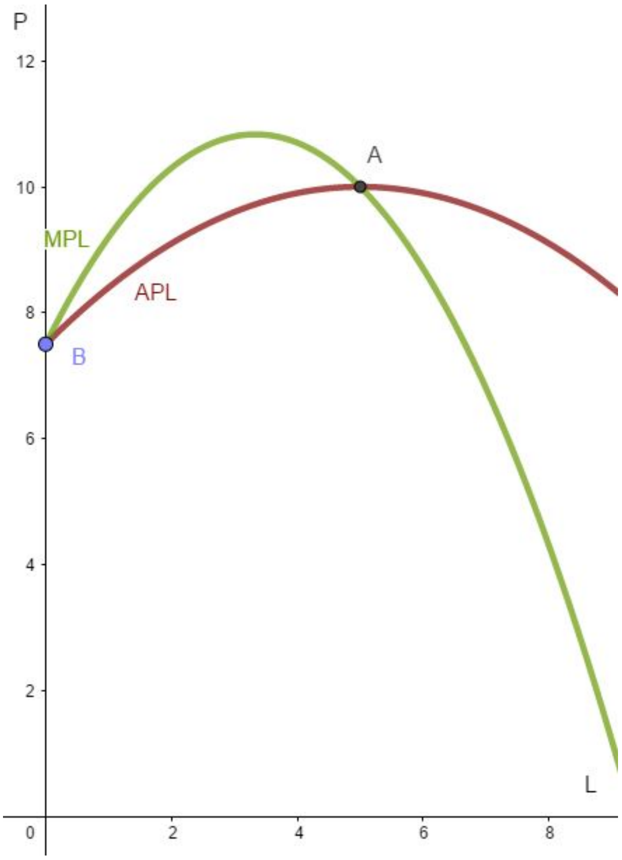


Рис. 36: Канонический вид продуктов труда

Здесь представлены графики **Среднего продукта труда** (APL) и Предельного продукта труда (MPL). Как вы можете заметить, они также выходят из общей точки, а график предельного продукта труда пересекает график среднего продукта труда в его экстремуме.

Самое же интересное, что максимум среднего продукта труда и минимум средних переменных издержек - это одна и та же точка, если фирма производит свой товар только с помощью труда, а зарплата фиксирована (что является самым популярным сценарием в задачах).

Математически (учитывая, что в таком случае $VC = wL$):

$$APL = \frac{Q}{L}$$

$$AVC = \frac{VC}{Q} = \frac{wL}{Q} = \frac{w}{APL}$$

Мы можем видеть, что две данные функции обратны, то есть когда одна из них достигает максимума, то вторая гарантированно достигает минимума.

Долгосрочные и краткосрочные издержки

Стратегия фирм в долгосрочном и краткосрочном периоде значительно отличается из-за того, что в краткосрочном периоде фирма сильно ограничена имеющимся количеством капитала, тогда как в долгосрочном она имеет большее пространство для «маневра».

Для иллюстрации рассмотрим фирму, производящую товар с помощью труда и капитала. Производственная функция имеет вид $Q = \sqrt{KL}$, стоимость факторов производства: $w = 4, r = 16$. Допустим, в краткосрочном периоде фирма обладает фиксированным количеством капитала, равным 4 единицам. Нашей задачей будет получение функции издержек фирмы в долгосрочном и краткосрочном периодах.

Начинаем стандартную процедуру. В краткосрочном периоде:

$$Q = \sqrt{KL} = \sqrt{4L} = 2\sqrt{L}$$
$$L = \frac{Q^2}{4}$$

Подставим в функцию издержек:

$$TC_{SR} = 4L + 16K = Q^2 + 64$$

Теперь найдем функцию долгосрочных издержек (в долгосрочном периоде мы можем менять количество капитала):

$$Q = \sqrt{KL}$$
$$K = \frac{Q^2}{L}$$
$$TC = 4L + 16K = 4L + \frac{16Q^2}{L}$$

Прооптимизируем функцию по L: график - галочка с ветвями вверх, оптимум при $TC' = 0$.

$$TC' = 4 - \frac{16Q^2}{L^2} = 0$$
$$L = 2Q$$
$$TC = 4L + 16K = 16Q$$

Для графичной наглядности также найдем функции краткосрочных издержек для количества капитала, равного 9 и 16:

$$TC_9 = \frac{4}{9}Q^2 + 144$$
$$TC_{16} = \frac{1}{4}Q^2 + 256$$

А теперь посмотрим на графики средних издержек фирмы в долгосрочном периоде и в краткосрочном периоде при различных количествах используемого капитала:

$$AC_{LR} = 16$$
$$AC_4 = Q + \frac{64}{Q}$$
$$AC_9 = \frac{4}{9}Q + \frac{144}{Q}$$
$$AC_{16} = \frac{1}{4}Q + \frac{256}{Q}$$

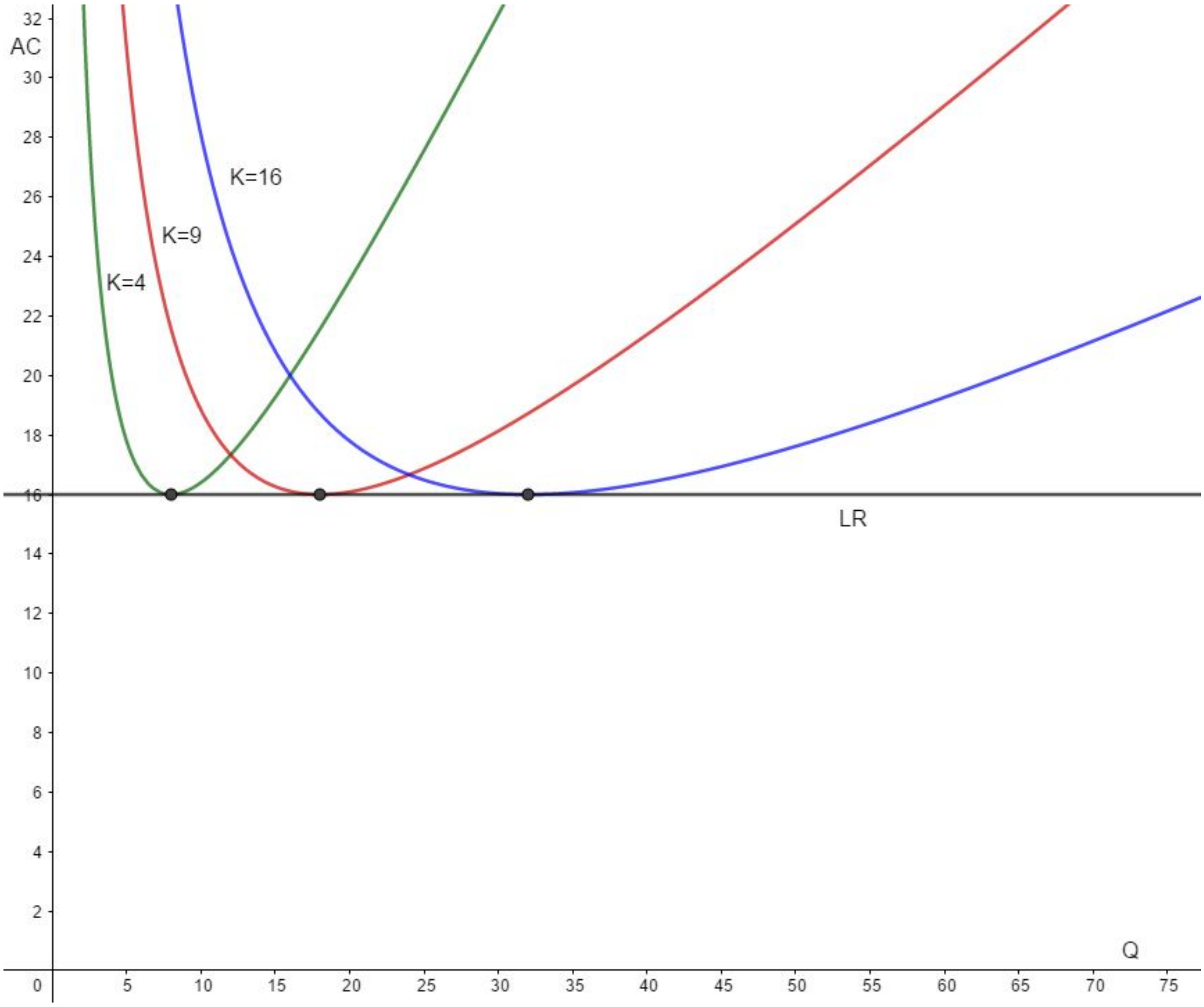


Рис. 37: Средние издержки в различных периодах

Как мы можем заметить, графики краткосрочого периода всегда выше долгосрочного **кроме одной точки**. Это происходит из-за того, что количество капитала, фиксированное в краткосрочном периоде, является оптимальным при каком-то одном объеме производства в долгосрочном периоде. При всех остальных объемах производства фирма оказывается в убытке из-за неэффективного количества капитала, которое она не может изменить.

Отдача от масштаба и Эффект масштаба

В анализе собственного производства фирме также хотелось бы понимать, что произойдет, если она будет расширять или сжимать свое производство. В этом контексте очень важно понимать такие экономические понятия, как отдача от масштаба и эффект масштаба (это не одно и то же).

Отдача от масштаба показывает, как увеличение количества факторов производства влияет на увеличения объема выпуска.
Эффект масштаба показывает, как увеличение выпуска влияет на итоговые издержки фирмы.

Принято считать, что эти эффекты тождественны, но на самом деле это немного не так. Для начала, посмотрим на определение каждого эффекта.

Отдача от масштаба

Положительной отдачей от масштаба называется эффект, при котором увеличение каждого фактора производства в некоторое количество раз приводит к увеличению выпуска в **большее** количество раз.

Постоянной отдачей от масштаба называется эффект, при котором увеличение каждого фактора производства в некоторое количество раз приводит к увеличению выпуска в **такое же** количество раз.

Отрицательной отдачей от масштаба называется эффект, при котором увеличение каждого фактора производства в некоторое количество раз приводит к увеличению выпуска в **меньшее** количество раз.

Например, если фирма использует в производстве труд и капитал и обладает производственной функцией $Q = f(K, L)$, то следующие свойства производственной функции обозначают соответствующие отдачи от масштаба при $\alpha > 1$:

Положительная отдача: $f(\alpha L, \alpha K) > \alpha f(L, K)$

Постоянная отдача: $f(\alpha L, \alpha K) = \alpha f(L, K)$

Отрицательная отдача: $f(\alpha L, \alpha K) < \alpha f(L, K)$

Эффект масштаба

Положительным эффектом масштаба называется ситуация, в которой увеличение объема выпуска приводит к снижению средних затрат фирмы.

Постоянным эффектом масштаба называется ситуация, в которой увеличение объема выпуска не влияет на средние затраты фирмы.

Отрицательным эффектом масштаба называется ситуация, в которой увеличение объема выпуска приводит к увеличению средних затрат фирмы.

Математически:

Положительная отдача: $AC'_Q < 0$

Постоянная отдача: $AC'_Q = 0$

Отрицательная отдача: $AC'_Q > 0$

Итак, во многих случаях отдача от масштаба и эффект масштаба обозначают одно и то же: в основном, это происходит при фиксированных ценах на факторы производства.

Строгое доказательство:
Пусть при $\alpha > 1$, $f(\alpha L, \alpha K) > \alpha f(L, K)$
Тогда при $TC(L, K) = wL + rK$ знаем, что $TC(\alpha L, \alpha K) = \alpha wL + \alpha rK = \alpha * TC(L, K)$
Тогда $AC(\alpha K, \alpha L) = \frac{TC(\alpha K, \alpha L)}{Q(\alpha K, \alpha L)} = \frac{\alpha * TC(L,K)}{Q(\alpha K, \alpha L)}$.
Пусть $f(\alpha L, \alpha K) = \beta f(L, K) > \alpha f(L, K)$
Тогда получается, что $AC(\alpha K, \alpha L) = \frac{\alpha * TC(K,L)}{\beta * Q(K,L)} = \frac{\alpha}{\beta} * AC(K, L)$.
Т.к. $\beta > \alpha$, то $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, а значит $AC(\alpha K, \alpha L) = \frac{\alpha}{\beta} * AC(L, K) < AC(L, K)$

В обратную сторону: пусть AC убывают. Увеличим количество факторов производства в α раз. Тогда количество товара увеличится в β раз. Так как AC убывают, то будет верно, что:

$$AC(\beta Q) = \frac{w * \alpha L + r * \alpha K}{\beta Q} < \frac{wL + rK}{Q} = AC(Q)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} * \frac{wL + rK}{Q} < \frac{wL + rK}{Q}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} < 1$$

$$\alpha < \beta$$

Получили, что при уменьшении средних издержек в α раз количество товара выросло больше, чем в α раз, что значит, что из положительного эффекта масштаба следует положительная отдача от масштаба.

Таким образом, мы получили, что при фиксированных ценах на факторы производства (w и r) отдача от масштаба и эффект масштаба оказываются тождественны (то же самое будет верно для постоянных и отрицательных эффектов).

Однако, при изменчивых ценах факторов данное утверждение можно опровергнуть. Например, если компании для того, чтобы нанять большее количество работников, приходится повышать им всем зарплату, то, несмотря на положительную отдачу при найме новых сотрудников, эффект масштаба может оказаться отрицательным из-за того, что издержки будут расти слишком быстро.

Положительная отдача производства часто обуславливается применение современных или конвеерных технологий, а также высокими фиксированными издержками. Отрицательная отдача практически всегда постигает фирму при огромных объемах производства из-за высокой сложности управления крупным предприятием.

Отдача от масштаба часто используется в решениях некоторых задач, и будет далее мной использоваться в других секциях.

Рыночные структуры

После того, как мы обсудили все обособленные друг от друга стороны производства и потребления товара, мы наконец-то столкнем производителей и потребителей вместе! С этого момента начинается самая большая часть олимпиадной экономики - рыночное взаимодействие и функционирование различных рыночных структур.

Важно понимать, чем отличается экономическая система от рыночной структуры.

Экономическая система - это структура всех экономических процессов, протекающих в стране и обуславливающих обращение всех благ. Существует три основных экономических системы: традиционная, плановая и рыночная.
Рыночная структура - это принцип взаимодействия между покупателем и производителем на рынке конкретного товара в **рыночной** экономической системе.

В олимпиадной экономике мы рассматриваем несколько рыночных структур, отражающих различные варианты взаимодействия потребителей и производителей товаров. Рыночные структуры отличаются различной степенью **рыночной власти**, которой обладают фирмы. Рыночная власть является степенью того, как сильно влияют действия фирмы на рынок в целом. По очереди мы рассмотрим каждую рыночную структуру в следующих разделах, а здесь я приведу краткое описание каждой из них:

1. **Совершенная конкуренция**

   Совершенная конкуренция считается идеальной в плане общественного благосостояния рыночной структурой. Главное отличие заключается в том, что **при совершенной конкуренции каждая фирма считает, что не может повлиять на цену товара и воспринимает ее как заданную**. Можно сказать, что фирма-совершенный конкурент не обладает никакой рыночной властью. Также в такой структуре все фирмы производят однородный товар, так что потребителям без разницы, у кого его покупать.

   Часто рынки совершенной конкуренции связывают с отсутствием издержек входа (затрат на вход на рынок в качестве производителя). Однако, существует множество моделей совершенной конкуренции с такими издержками. Также для рынков совершенной конкуренции свойственна отрицательная отдача от масштаба: таким образом, значительно эффективнее существование многих малых фирм, а не нескольких крупных.

   Классический пример совершенной конкуренции - биржевые рынки. Если товар торгуется на бирже, то он гарантированно однородный, а также его довольно сложно приобрести по цене, отличной от биржевой.

2. **Монополия**

   Монополия отличается тем, что фирма, являющаяся единственным производителем товара, осознает свою полную рыночную власть. Также, **фирма-монополист сама назначает цену на свой товар** и может быть ограничена только размером рынка (рыночным спросом). Из-за возможности назначения цены монополия имеет возможность проведения **ценовой дискриминации**.

   Монополии бывают естественные и искусственные. Естественная монополия часто образуется в случае положительной отдачи от масштаба или при присутствии значительных издержек на вход (например, требование постройки огромного завода или дорогих научных разработок).

Таким образом, естественная монополия образуется из-за естественных причин. Классический пример естественной монополии - почтовые услуги или железнодорожные перевозки.

Искусственная монополия часто образуется из-за недобросовестной конкуренции или коррупции (например, создание искуственных перпятствий для входа на рынок). Также искусственной монополией называется сговор на рынке товара, когда фирмы из состояния конкуренции договариваются об объемах производства и ценах. Искуственные монополии обычно вредны для рынков, поэтому практически каждая страна имеет **Антимонопольное законодательство**, нацеленное на борьбу с искуственными монополиями.

Аналогичной монополии структурой является монопсония - присутствие одного потребителя и множества производителей. В таком случае уже единственный потребитель обладает полной рыночной властью и может устанавливать собственную цену.

3. **Олигополия**

   Олигополия - рыночная структура, в которой на рынке присутствуют **несколько (обычно крупных) фирм, каждая из которых имеет некоторую рыночную власть**. Существует множество олигополистических моделей устройства рынка, которые отличаются различными вариантами взаимодействия между фирмами. Также, олигополией называют только структуру, все фирмы которой производят однородный товар (так что потребителям все равно, у какого производителя его приобретать).

   Аналогичной рыночной структурой будет олигопсония, в которой уже несколько потребителей обладают рыночной властью и взаимодействуют друг с другом.

4. **Монополистическая конкуренция**

   Эта рыночная структура является самой интересной, но и самой сложной моделью. В олимпиадной экономике задач на монополистическую конкуренцию практически нет, однако, встречаются тестовые вопросы.

   Монополистическая конкуренция основана на **дифференциации товара**. Дифференциация проявляется в брендировании или специально внесенных отличиях, делающих товары различных фирм непохожими друг на друга.

   Таким образом, образуется две группы потребителей: первой группе безразлично, у кого покупать товар, так для для них дифференциация несущественна. Эта группа потребителей является конкурентным рынком фирм. Вторая группа является приверженцем определенного вида товара или фирмы. Эти люди образуют монополистические рынки фирм (среди группы своих приверженцев фирма является монополистом).

Также довольно часто встречаются различные комбинации данных рыночных структур в задачах сразу на несколько связанных между собой рынков. В любом случае, для решения таких задач обязательно нужно знать, как решается каждая конкретная рыночная структура.

Рентабельность

Рентабельностью в экономике обычной называют отношение **прибыли** фирмы к ее **издержкам** ($Rent = \frac{\Pi}{TC}$). Рентабельность показывает, сколько прибыли приходится на каждую вложенную денежную единицу, поэтому данная величина считается довольно удобной при сравнении различных проектов.

> Учтите, что рентабельность может также обозначать отношение прибыли к выручке или вообще какие-то другие величины, у этого слова существует множество определений. Однако, в данном учебнике мы будем пользоваться именно тем классическим определением, которое я дал выше.

Из определения рентабельности следует, что она также равна **средней прибыли** к **средним издержкам**. ($Rent = \frac{\Pi}{TC} = \frac{\frac{\Pi}{Q}}{\frac{TC}{Q}} = \frac{A\Pi}{AC}$). Также рентабельность можно представить в виде $Rent = \frac{A\Pi}{AC} = \frac{AR-AC}{AC} = \frac{P-AC}{AC} = \frac{P}{AC} - 1$.

Как видно из последней формулы, максимальная рентабельность достигается в тот момент, когда цена максимальна, а средние издержки минимальны.

Однако, такое понятие рентабельности в краткосрочном периоде считается бесполезным, так как некоторые издержки в краткосрочном периоде уже являются понесенными и фиксированными. Таким образом, для краткосрочного периода гораздо лучше использовать понятие **рентабельности к переменным издержкам**. Сооветственно рентабельностью к переменным издержкам называется величина $Rent_{VC} = \frac{\Pi}{VC}$. Данная величина как раз показывает прибыль с каждого вложенного рубля и может быть использована для оценки проектов в краткосрочном периоде.

Рентабельность может быть меньше 0, если фирма по какой-либо причине получает отрицательную прибыль.

Максимизация прибыли

Целью фирм в подавляющем большинстве олимпиадных задач по экономике является максимизация прибыли. Запомните одно простое правило:

Если в задаче ничего не сказано про цель фирмы, то считается, что она стремится максимизировать прибыль.

Для каждой рыночной структуры характерен свой метод максимизации прибыли. Итак, мы начинаем.

Совершенная конкуренция

Совершенная конкуренция - рыночная структура, главное отличие которой заключается в том, что фирмы воспринимают цену как заданную и считают, что не могут на нее повлиять. В таком случае фирмы видят спрос на свою продукцию как горизонтальную линию $P = Const$, выручка фирмы $TR = PQ$ является линейной функцией по Q, а предельная и средняя выручка равны P $(AR = \frac{TR}{Q} = \frac{PQ}{Q} = P,\ MR = TR'_Q = (PQ)'_Q = P)$.

Общая теория фирмы

Во многом поведение совершенно конкурентной фирмы зависит от того, какое минимальное значение принимают ее AVC. Фирма будет участвовать в торговле только при условии $P \geqslant min(AVC)$. Для наглядности рассмотрим график:

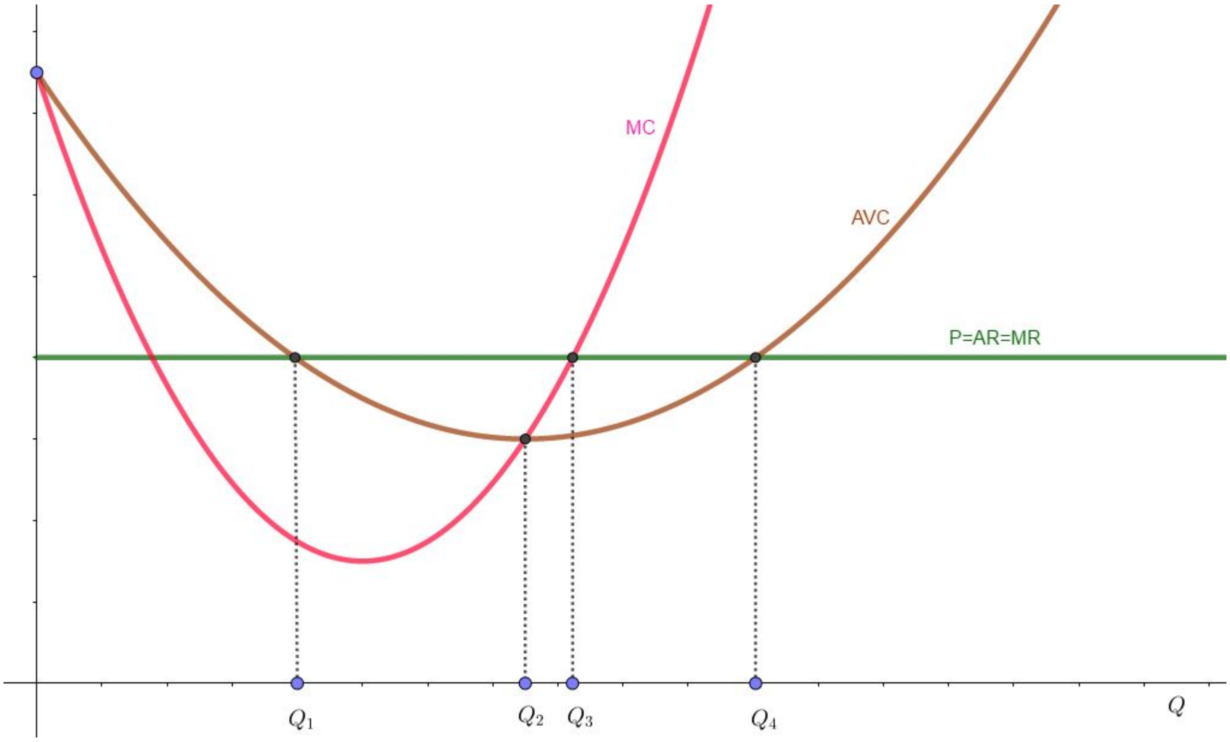


Рис. 38: Ситуация $P > min(AVC)$

На участке от Q_1 до Q_4 цена на товар фирмы оказывается выше ее средних переменных издержек. Следовательно, если фирма выберет любой объем производства между этими двумя, то она получит прибыль, большую, чем $-FC$. Так как FC уже понесены, то фирме это оказывается выгодно. Замечу, что такой интервал объемов производства существует, если есть хотя бы какие-то значения AVC ниже цены. Это просходит как раз при $P > min(AVC)$.

Важно понимать, что в краткосрочном и долгосрочном периодах условия входа фирмы на рынок (или в принципе ее присутствие на рынке) немного отличаются.
Довольно часто можно встретить правило, что фирма будет присутствовать на рынке в SR при $P > min(AVC)$, а в LR при $P > min(AC)$. Это действительно так, однако, второе утверждение несет в себе немного другой смысл. Так как в долгосрочном периоде нет фиксированных издер-

жек, то все издержки фирмы являются переменными и условия $P > min(AVC)$ и $P > min(AC)$ оказываются тождественными.

Рентабельность

Немного про точки оптимума рентабельности для совершенно конкурентной фирмы. Так как рентабельность фирмы можно представить в виде $Rent = \frac{P}{AC} - 1$, а цена для совершенного конкурента является постоянной, то максимум рентабельности достигается в точке минимума AC. Соответственно, максимум рентабельности к переменным издержкам достигается в точке минимума AVC (точка Q_2 на графике выше).

Интересный факт:

В совершенной конкуренции максимум рентабельности никогда не достигается при количестве, меньшем, чем максимум прибыли, если прибыль положительна.

Докажем: Пусть Q^* - точка максимума рентабельности (напомню, это точка минимума AC). Пусть мы произвели $Q_1 < Q^*$ с целью получить максимальную прибыль. Заметим, что $\Pi = TR - TC = (P - AC)Q$. Т.к. $Q_1 \neq Q^*$, то $AC(Q_1) \geqslant AC(Q^*)$.

Получается, что $(P - AC)(Q_1) \leqslant (P - AC)(Q^*)$. Тогда оказывается, что оба множителя прибыли ($(P - AC)$ и Q) в точке Q_1 меньше, чем в точке Q^*. Тогда $\Pi(Q^*) > \Pi(Q_1)$. Тогда точка Q_1 не может быть точкой максимальной прибыли.

Это рассуждение будет неверно, если один из множителей прибыли является отрицательным, то есть когда фирма получает отрицательную прибыль. Также, данный факт будет верен и для монополии.

Максимизация прибыли и вывод функции предложения

Оптимизация прибыли - важнейший раздел каждой рыночной структуры в олимпиадной экономики. Так как цена для совершенного конкурента является заданной извне, то оптимальное количество товара зависит от этой цены как от параметра. Зависимость оптимального количества товара от цены называется **функцией предложения фирмы**. Функция предложения фирмы может существовать только при невозможности влиять на цену.

Сейчас мы разберем основные методы оптимизации прибыли, которые также будут использоваться в других рыночных структурах. Как вы сможете заметить, они довольно схожи с обычными методами индивидуальной оптимизации функций. Два основных метода максимизации прибыли фирм - метод основной функции и метод предельных функций.

Для определения оптимального количества товара в условиях совершенной конкуренции необходимо знать только функцию издержек фирмы.

Максимизация основной функции (в лоб)

Найдем функцию предложения фирмы, имеющей функцию издержек $TC = Q^2 + 10Q$.

$$\Pi = TR - TC = PQ - Q^2 - 10Q \xrightarrow{Q} max$$

Функция является параболой ветвями вниз, значит, максимум в вершине:

$$Q^* = \frac{-b}{2a} = \frac{P - 10}{2}$$

Проверим на ограничение $Q \geqslant 0$. Оно выполняется только при $P \geqslant 10$, а иначе берем ближайшую точку к вершине $Q^* = 0$ (т.к. вершина отрицательна).

Таким образом, функция предложения нашей фирмы имеет вид:

$$Q = \begin{cases} \frac{P-10}{2} & P > 10 \\ 0 & P \leqslant 10 \end{cases}$$

Оптимизация с помощью предельных функций

Максимизация с помощью предельных функций является эффективной при **кусочной** функции издержек фирмы, так как при обычной оптимизации в лоб в таком случае приходится рассматривать множество случаев.

Для этого метода нам, собственно, потребуются фукнции **предельной выручки** (MR) и **предельных издержек** (MC). Для наглядности давайте рассмотрим кусочную функцию издержек фирмы, чье предложение нам нужно вывести:

$$TC = \begin{cases} 10Q + \frac{Q^2}{2} & Q \leqslant 10 \\ \frac{Q^2}{2} + 100 & Q > 10 \end{cases}$$

Найдем функцию предельных издержек данной фирмы:

$$MC = \begin{cases} 10 + Q & Q \leqslant 10 \\ Q & Q > 10 \end{cases}$$

Если вы используете максимизацию прибыль с помощью MR и MC, обязательно нужно проверять непрерывность функции общих издержек фирмы.
Если функция общих издержек непрерывна, то она полностью обуславливается функцией предельных издержек, и анализировать ее значительно проще. Если функция издержек прерывается, то этот сдвиг не отображается в предельных издержках, и вам нужно быть очень аккуратными при анализе.
Мы разберем обе ситуации и посмотрим, чем они отличаются.

Замечаем, что наша функция общих издержек в данном случае является непрерывной, то есть полностью обуславливается функцией MC (для этого проверям, что при $Q = 10$ обе функции имеют одинаковое значение). Для дальнейшей оптимизации с помощью предельных функция я вам **крайне советую** рисовать их графики (более того, без графиков проводить такую оптимизацию практически невозможно). Нарисуем график предельных издержек фирмы:

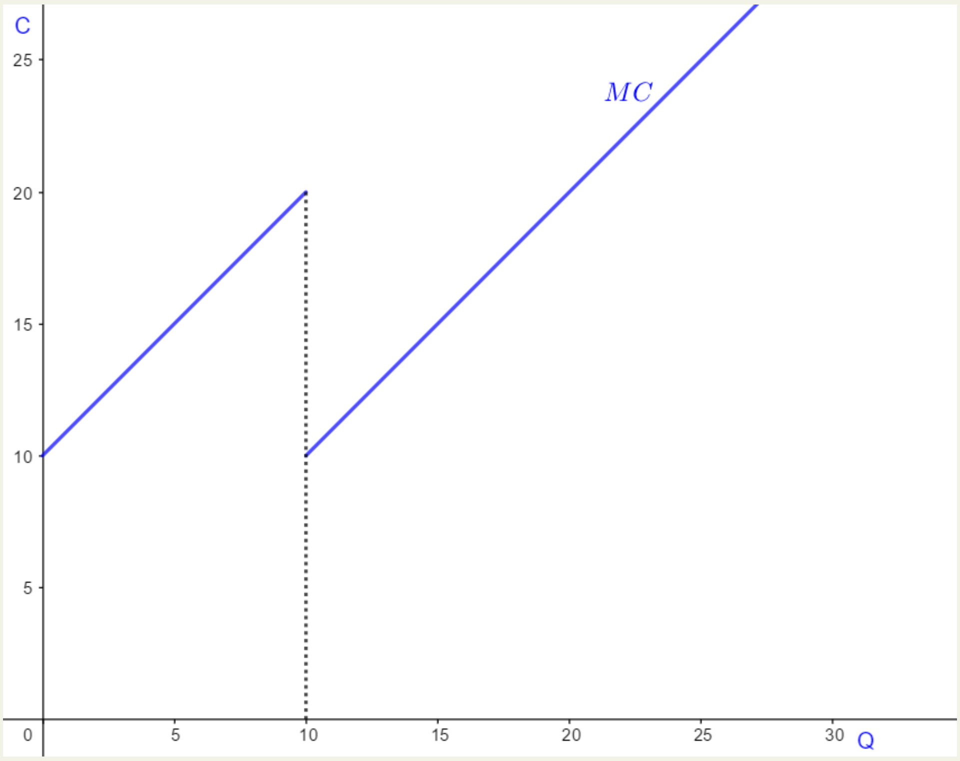


Рис. 39: График MC

Вспоминаем, что у совершенного конкурента предельная выручка совпадает с ценой товара и является фиксированной. Нарисуем какую-то случайную цену товара, чтобы посмотреть на взаимодействие MR и MC, и возьмем какие-то случайные Q_1 и Q_2:

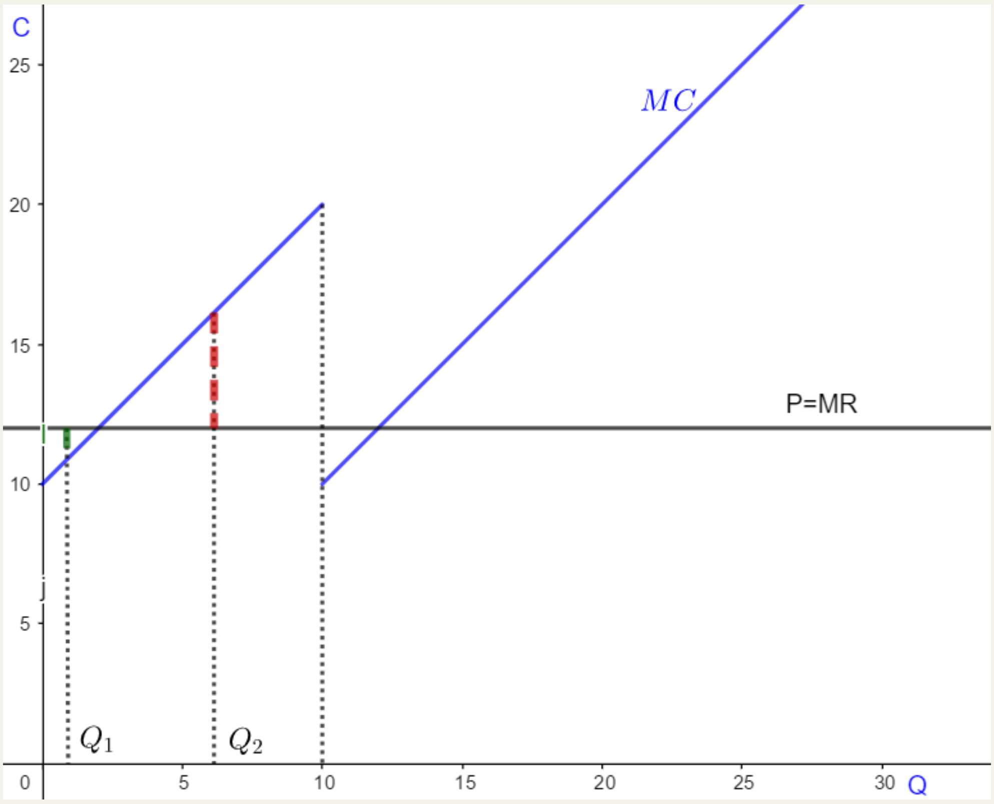


Рис. 40: MC и цена

Как же работать с данным графиком? Рассмотрим количество Q_1. Как мы можем заметить, в этой точке $MR > MC$. Что это значит? Что конкретно за данную единицу товара наша выручка вырастет больше, чем издержки. Таким образом, данный товар имеет положительную **предельную прибыль**. Размер прибыли, которую получит фирма за конкретно этот товар, является разницей между MR и MC (отмечена зеленым пунктиром).

Для количества Q_2 ситуация противоположная. Теперь уже $MC > MR$, следовательно, за эту единицу товара фирма получит убыток, равный разнице между MC и MR (отрезок отмечен красным на графике).

Таким образом, мы можем отразить прибыль или убыток для каждого количества товара:

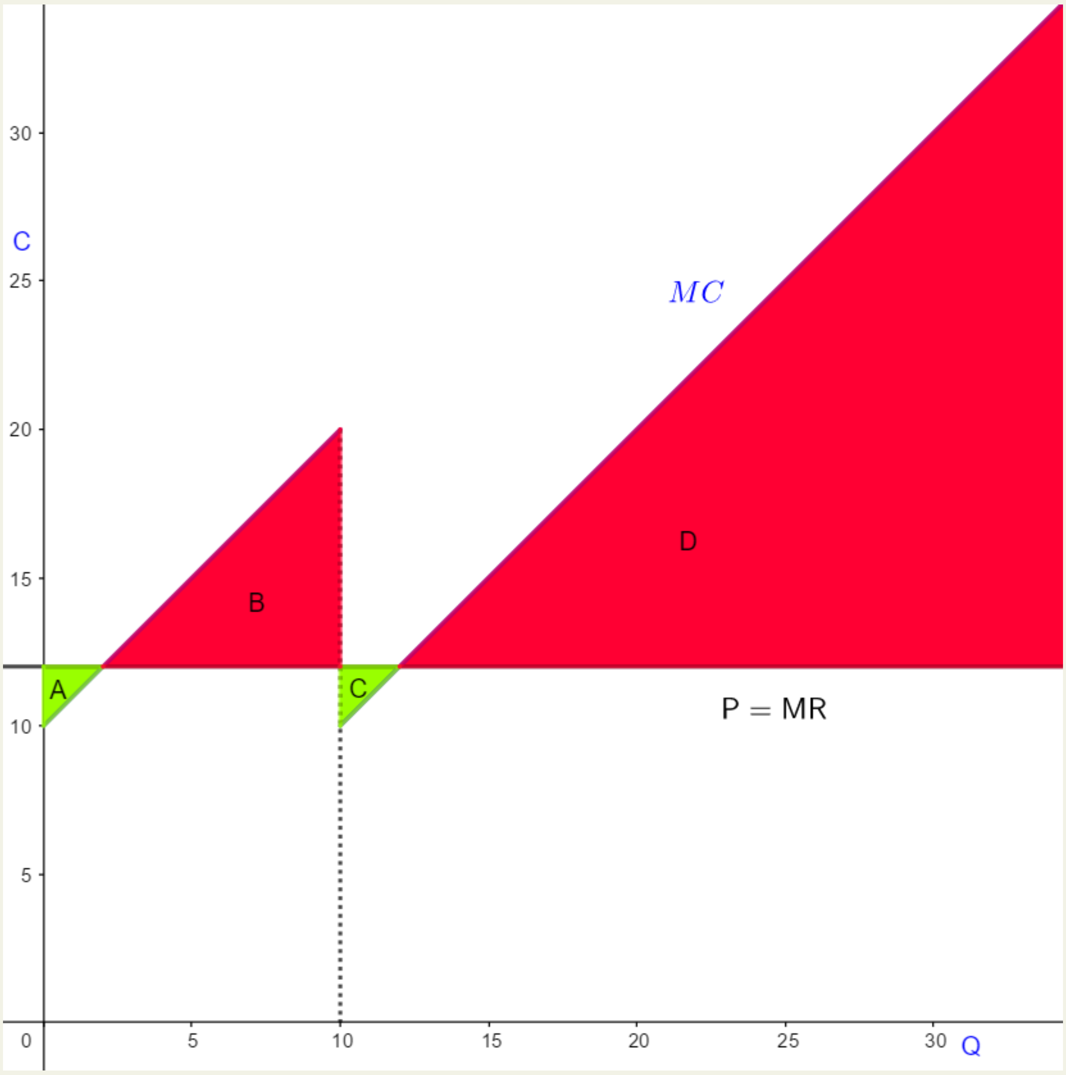


Рис. 41: Площади прибылей и убытков

A и C – прибыли, которые потенциально может получить фирма, а B и D – убытки. Чтобы получить соответствующую площадь, нужно произвести определенное количество товара. Например, если произвести 10 единиц, то фирма получит прибыль A и убыток B. Если произвеси чуть больше, то фирма получит прибыли A и C, а также убыток B. Таким образом, чтобы получить прибыль C необходимо также получить убыток B (простыми словами, чтобы произвести одиннадцатую единицу товара, необходимо произвести девятую).

Итак, функция предложения - зависимость оптимального количества товара при каждом конкретном значении цены. Для ее построения мы будем «поднимать» цену с самого низа и смотреть, какое оптимальное количество товара фирма выберет при каждой конкретной цене. Сначала рассмотрим самое низкое положение цены:

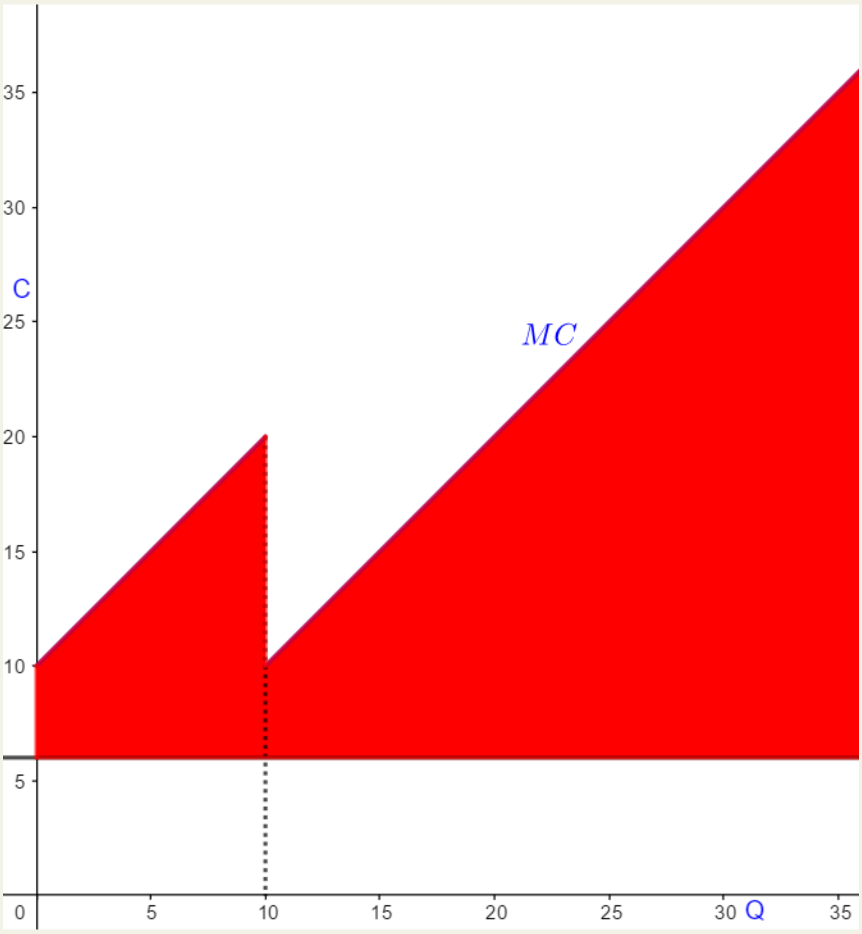


Рис. 42: Низкая цена товара

В данном случае никакое количества товара не даст нам положительную прибыль, соответственно, оптимумом является $Q = 0$. Это происходит до того момента, пока цена не поднимается выше 10.

Рассмотрим далее ситуацию, которую мы уже видели, когда цена становится чуть больше 10:

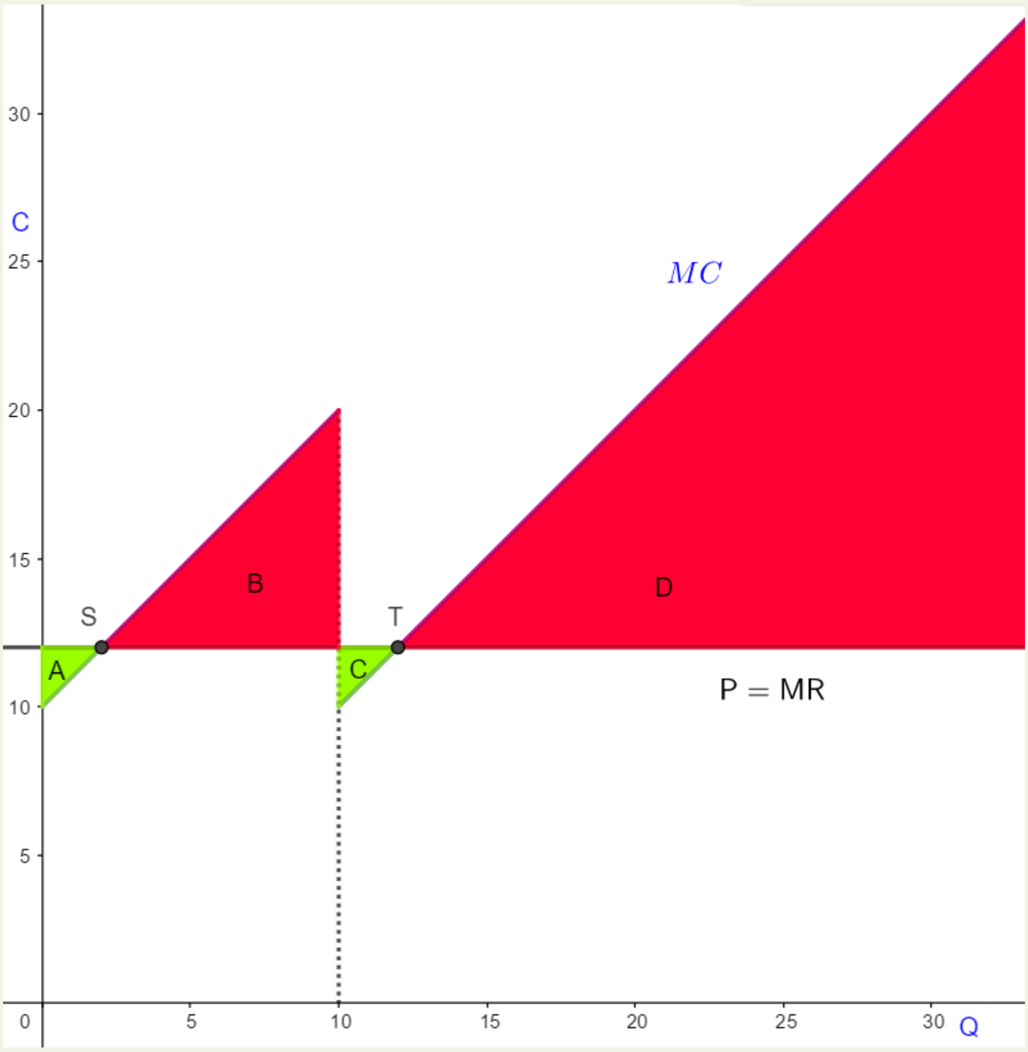


Рис. 43: Цена чуть больше 10

Заметим, что прибыль A мы можем получить не неся абсолютно никаких убытков. Также мы можем получить прибыль C, но для этого нужно сравнить ее с убытком B, через который необходимо будет пройти для ее получения. В нашем случае убыток больше, так что мы будем довольствоваться только прибылью A, производя в точке S (если мы пойдем дальше, то получим убыток). Таким образом, пока площадь C будет меньше площади B, наша оптимальная точка будет на пересечении цены и первого отрезка предельных издержек.

Однако, все меняется, как только цена ставновится достаточно высокой:

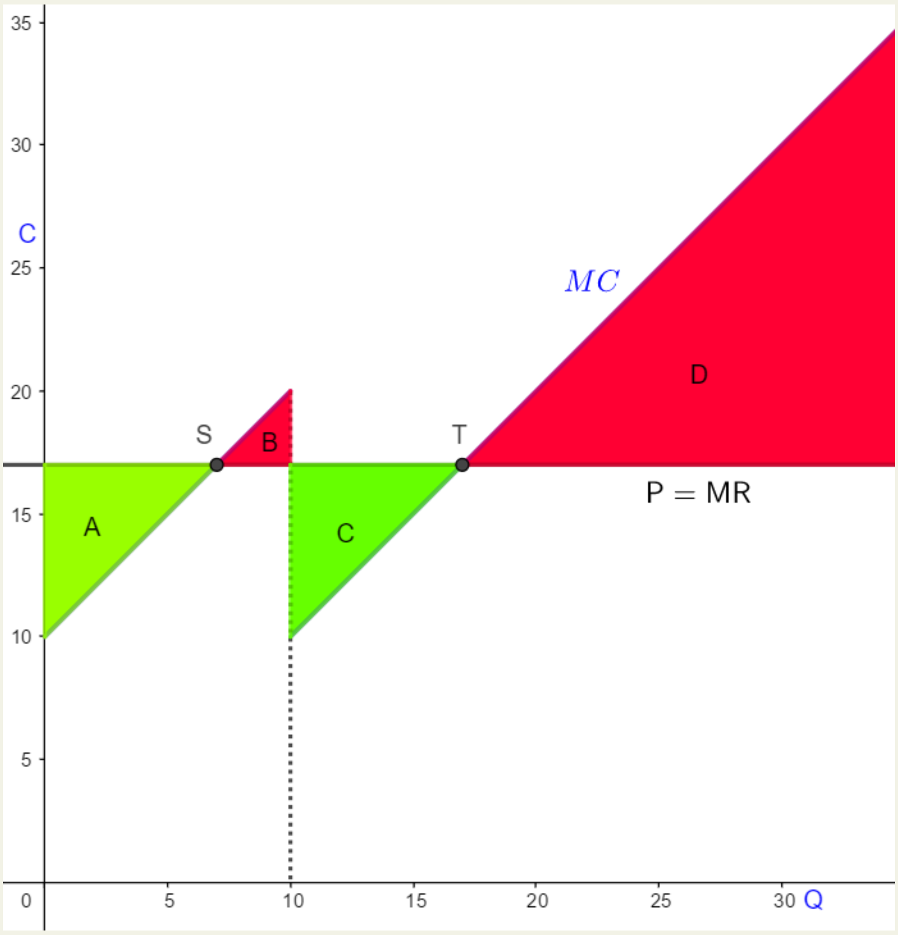


Рис. 44: Цена чуть меньше 20

Теперь прибыль C больше убытка B, так что фирме выгодно произвести количество, соответствующее точке T. Таким образом, в данном случае оптимум будет находиться именно в данной точке. Более того, при увеличении цены оптимум будет всегда находиться в точке пересечения цены со вторым участком MC.

Когда же точка оптимума перескакивает с первого участка на второй? В тот момент, когда цена достигает такого значения, при котором площади B и C сравниваются. Выразив их площади через параметр P можно найти, что это происходит при $P = 15$.

Теперь, наконец, мы готовы изобразить нашу функцию предложения. Так как предложение показывает оптимальный объем производства при каждом значении цены, то оно является множеством оптимальных точек при каждом значении цены. Это как раз те самые точки, которые мы получили. Их множество, а, соответственно, и функция предложения, имеет следующий вид:

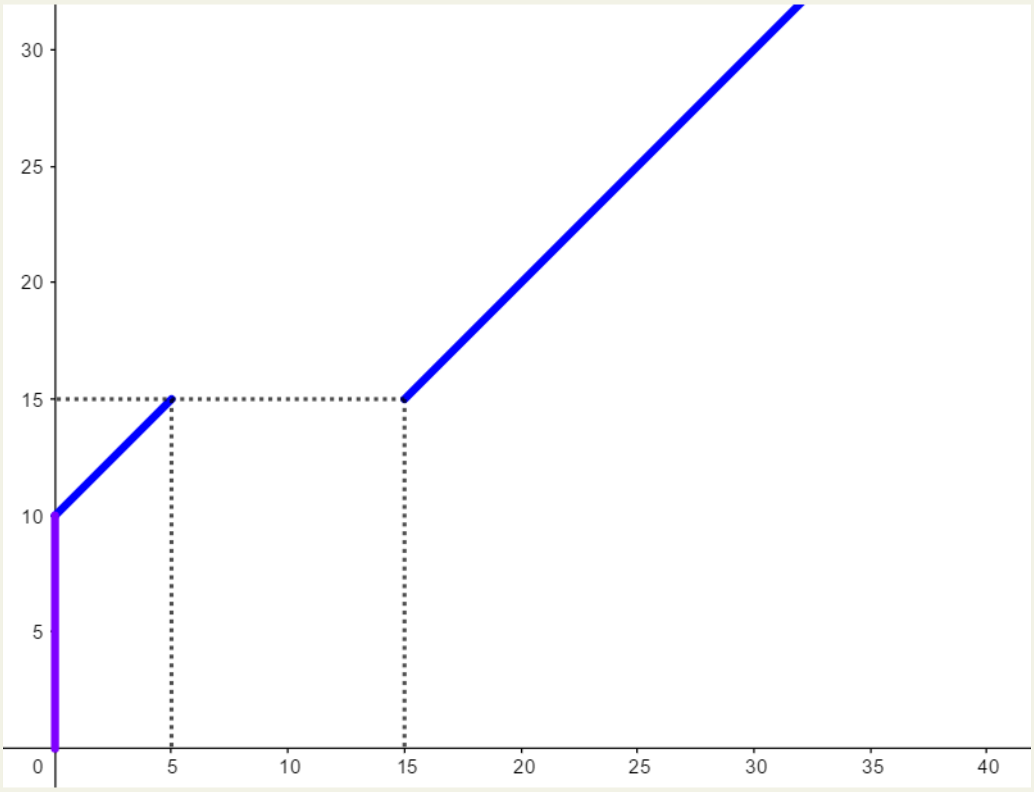


Рис. 45: Функция предложения фирмы

Заметьте, что при $P = 15$ фирма имеет два оптимальных количества товара (5 и 15), так как площади B и C будут равны, а, следовательно, прибыль в точке T($Q = 15$) будет равна прибыли в точке S($Q = 5$).

Осталось только (если от нас это требуется) задать аналитически это график как зависимость Q от P. Это график описывается следующей системой:

$$\begin{cases} Q = 0 & P < 10 \\ Q = P - 10 & 10 \leqslant P < 15 \\ Q = \{5, 15\} & P = 15 \\ Q = P & P > 15 \end{cases}$$

Таким образом, мы получили функцию предложения фирмы с помощью предельных функций.

Несмотря на то что все мои рассуждения здесь выглядят громоздкими, на олимпиаде вы можете объяснить этот метод коротко своими словами и он будет засчитан, так как является стандартным методом получения предложения, известным всем жюри экономических олимпиад.

Теперь рассмотрим вывод предложения с помошью предельных функций в случае разрывной функции общих издержек. Такие функции также встречаются довольно часто. Обратите внимание на следующую задачу:

Фирма, обладающая функцией издержек $TC = \frac{Q^2}{2}$, производит некий товар. Однако, данная отрасль регулируется государством, которое обязывает все предприятия крупного бизнеса платить лецензионный сбор, равный 200 д.е. Предприятие считается крупным бизнесом если производит больше 20 единиц продукции.

Таким образом, полную функцию издержек фирмы можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} TC = \frac{Q^2}{2} & Q \leqslant 20 \\ TC = \frac{Q^2}{2} + 200 & Q > 20 \end{cases}$$

Как вы можете заметить, данная функция имеет разрыв в точке $Q = 20$, тогда как функция MC непрерывна: $MC = TC'(Q) = Q$ при любых Q. То есть, построив функцию MC мы никак не учтем эти 200 д.е. Как же тогда выводить предложение? Давайте посмотрим на следующий график предельных издержек с обозначенной линией, на которой происходит разрыв:

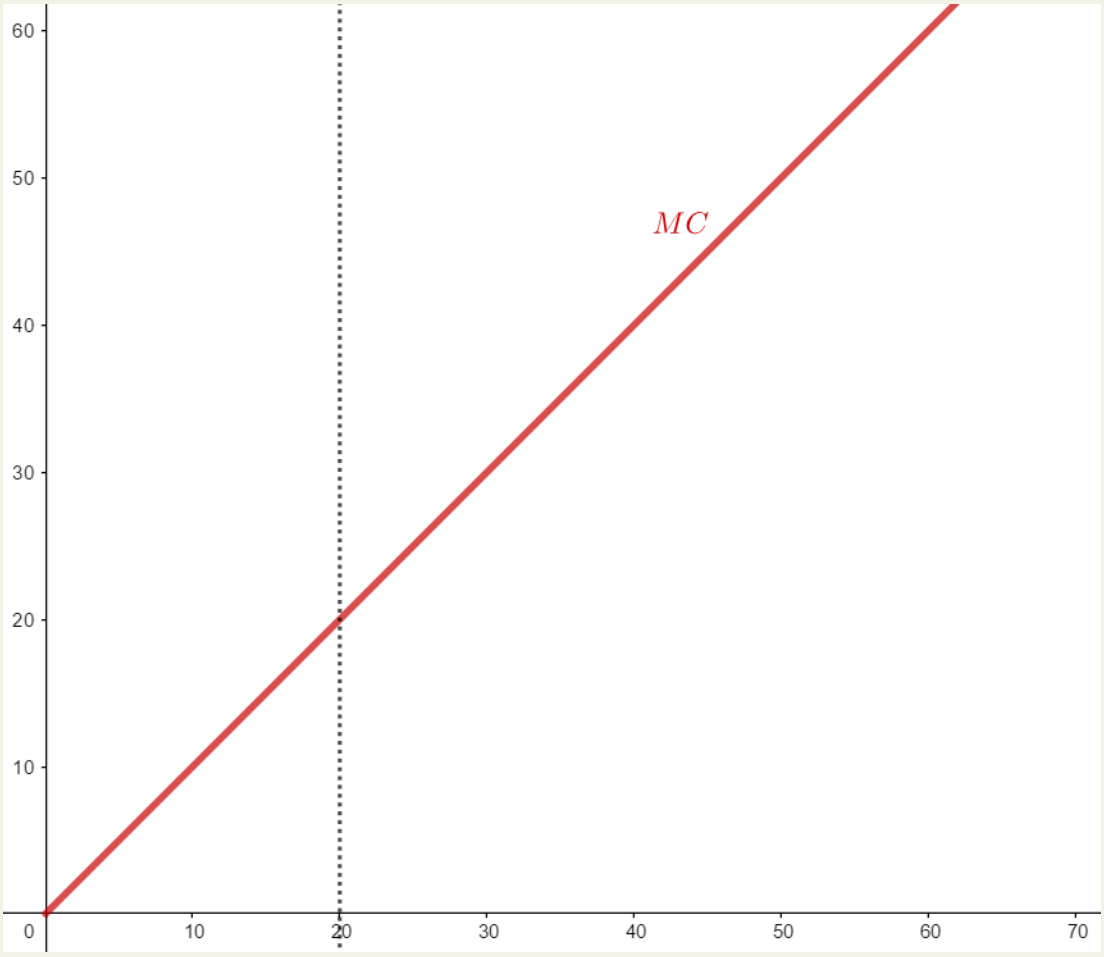


Рис. 46: Предельные издержки с лицензией

Заметим, что без учета лицензии, какую бы цену фирма ни ставила, оптимум всегда будет на пересечении цены с функцией MC:

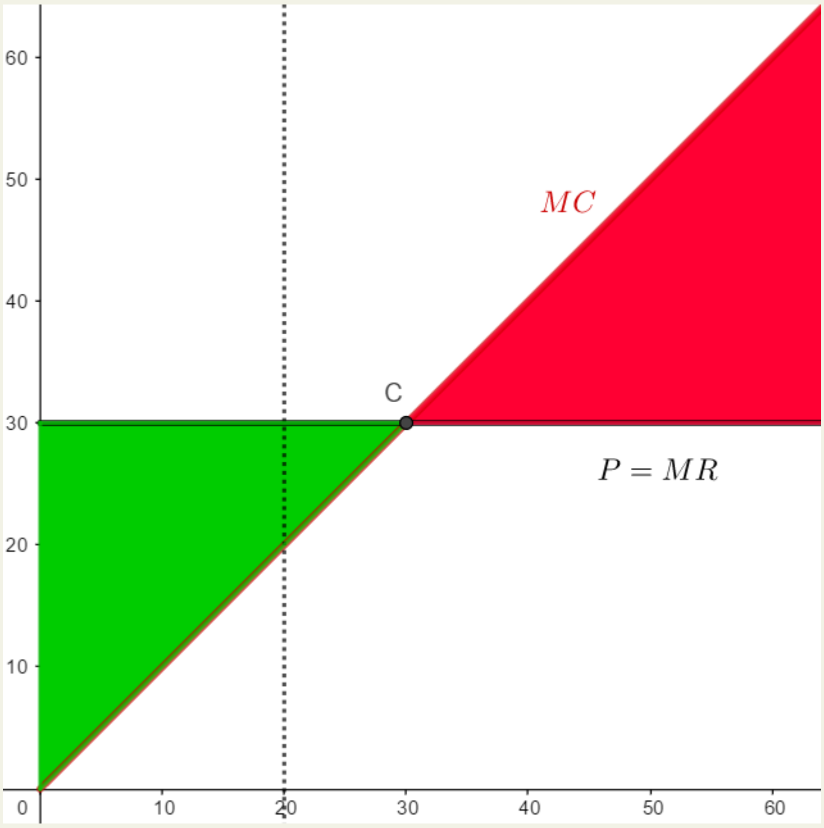


Рис. 47: Оптимум - точка C

Однако, наша главная задача - учесть, что если оптимальная точка находится по количеству правее 20, то фирма несет дополнительные издержки. Для этого, если точка оптимума находится правее 20, мы должны также проверить точку $Q = 20$ на оптимум. Мы как бы останавливаемся в месте разрыва и думаем, идти ли нам дальше. Для наглядности, посмотрим на еще один график:

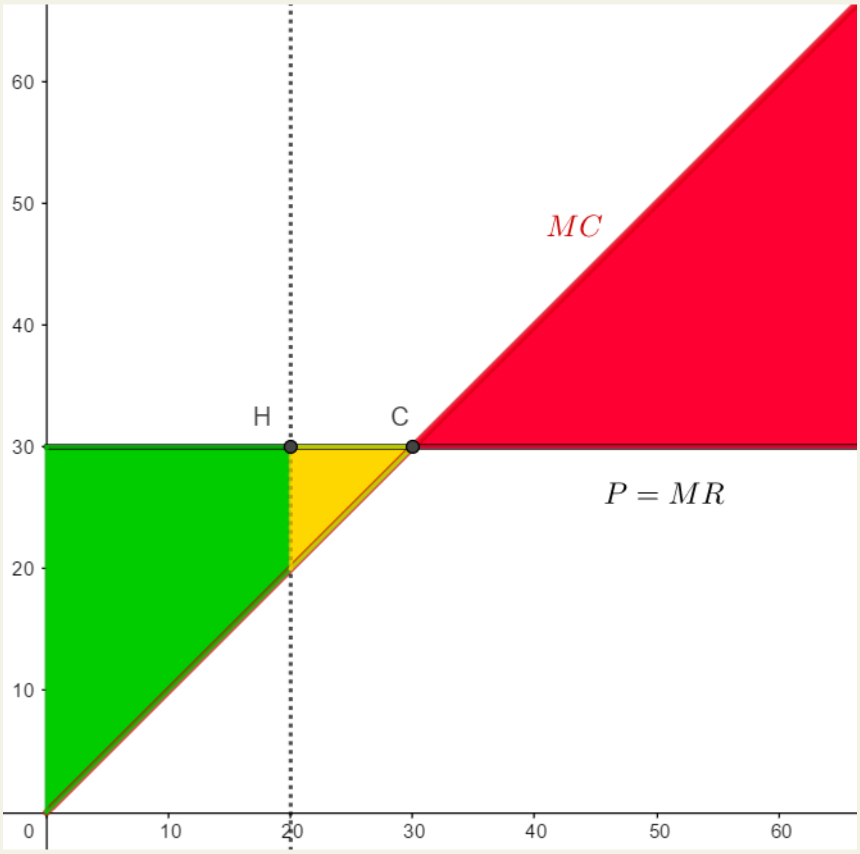


Рис. 48: Кандидаты на оптимум - точки H и C

При цене, равной 30 (как на графике), фирме выгодно производить товар до количества, равного 20, так как каждая единица приносит прибыль (эта зона отмечена зеленым). Дальше идет желтая зона. Это дополнительная прибыль, которую фирма может получить. Однако, чтобы выйти в эту зону, придется заплатить лишние 200 д.е. По сути, еще одна красная область сжата в сингулярность в точке $Q = 20$, и мы сравниваем ее площадь (которая равна 200) с прибылью, которую мы можем получить, пройдя эту красную область.

Таким образом, мы должны сравнить желтую область с 200. Если она больше, чем 200, то фирме выгодно пройти убыток, равный 200, чтобы получить эту прибыль и фирма выберет точку C. Если она меньше, фирма не хочет получать эту прибыль проходя через убыток, и производит в точке H. Если она равна 200, то фирме без разницы.

Осталось только понять, при каком значении цены эта площадь будет равна 200. Выразив площадь через P как через параметр, получим, что она будет равна 200 при $P = 40$.

Следовательно, если $P < 40$, фирма остаемся малым бизнесом чтобы не платить лицензию и производим 20 единиц товара. Если $P > 40$, цена становиться слишком привлекательной, и фирма платит лицензию, чтобы произвести оптимальную точку C. При $P = 40$ фирме безразлично, платить лицензию или нет. Таким образом, наше множество оптимальных точек выглядит следующим образом:

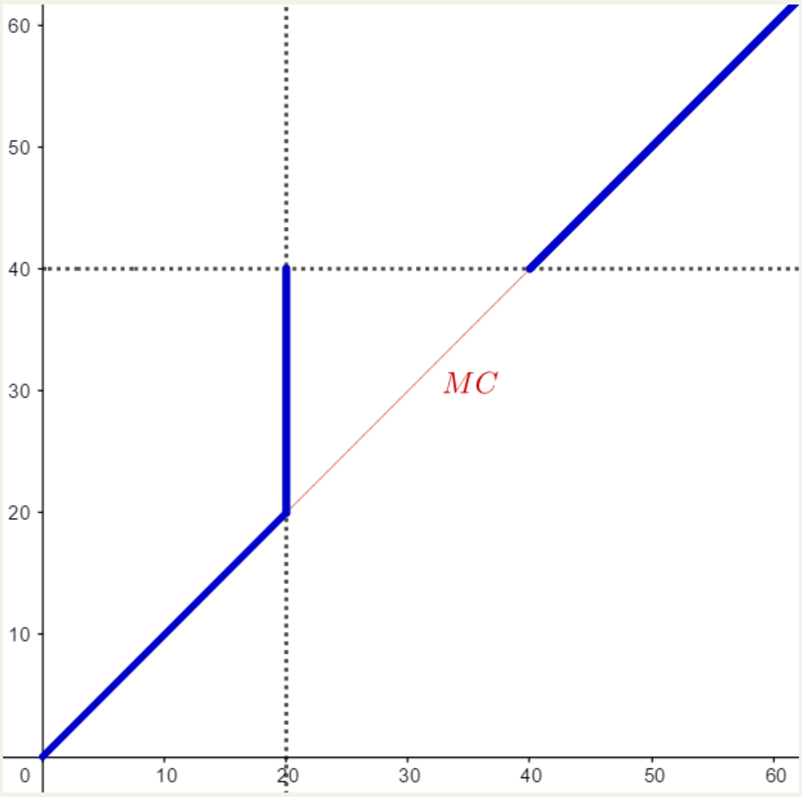


Рис. 49: Функция предложения с лицензией

Собственно, это и есть функция предложения фирмы. Можно задать ее аналитически:

$$\begin{cases} Q = P & P < 20 \\ Q = 20 & 20 \leqslant P < 40 \\ Q = \{20, 40\} & P = 40 \\ Q = P & P > 40 \end{cases}$$

Рынок совершенной конкуренции

После того, как мы обсудили поведение каждой фирмы, самое время перейти к взаимодействиям между фирмами и потребителями на рынке совершенной конкуренции.

Взаимодействие это происходит довольно просто: равновесие на рынке совершенной конкуренции достигается в том случае, если **суммарный спрос на рынке оказывается равен суммарному предложению**. Суммарное предложение является суммой предложений каждой фирмы. Нахождение суммарного предложения ничем не отличается от нахождения суммарного спроса, которое я описал в теме **Полезность**. Спрос обычно обозначается буквой $D(Demand)$, а предложение - буквой $S(Supply)$.

В классических предпосылках (если не сказано иного) считается, что выполняются закон спроса и закон предложения. Закон спроса гласит, что величина спроса убывает по цене товара (чем меньше цена, тем большее количество товара готовы приобрести потребители). Закон предложения гласит, что величина предложения возрастает по цене (чем больше цена, тем больше товара хотят продавать фирмы).

Стандартный график рынка совершенной конкуренции выглядит следующим образом:

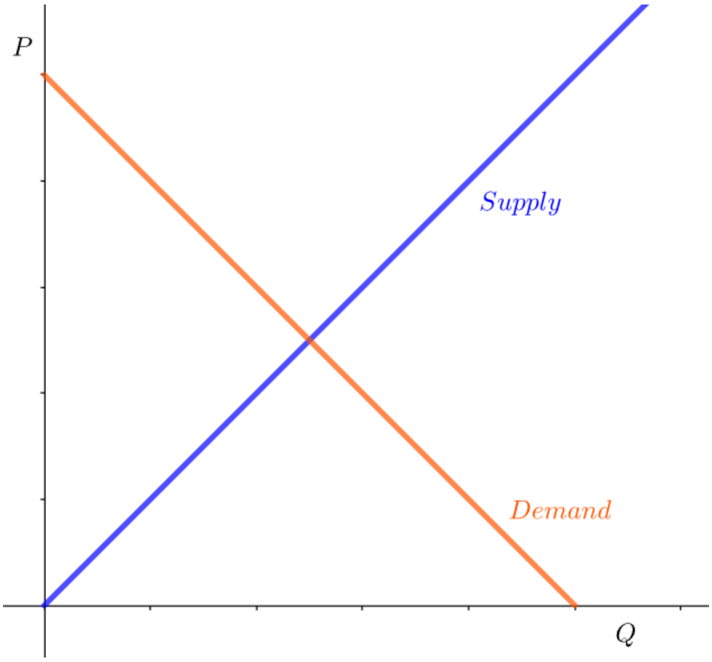


Рис. 50: Рынок совершенной конкуренции

Q всегда находится на горизонтальной оси, P - на вертикальной, несмотря на то что и спрос и предложения являются функциями Q от P. Так принято делать из-за того, что и спрос, и предложения выводятся из функция полезности и издержек, в которых Q является аргументом и располагается на горизонтальной оси.

Кстати, не стоит путать понятия **спрос** и **величина спроса**.
Спрос - это вся функция спроса в совокупности, то есть зависимость количества товара, которое потребители хотят приобрести, от его цены.
Величина спроса - это конкретное значение количества товара, которое потребители готовы приобрести по определенной цене.
Например, спросом будет являться функция $Q = 100 - P$, а величиной спроса будет являться количество $Q = 30$ при цене $P = 70$.
Употреблять эти понятия нужно точно в контексте их значения. Экономисты (особенно жюри олимпиад) очень не любят, когда их путают.
То же самое касается **предложения** и **величины предложения**.

Теперь познакомимся с понятием рыночного равновесия. Допустим, нам даны следующие функции спроса и предложения: $Q_d = 80 - P$, $Q_s = P - 40$. Чтобы найти равновесие, просто пересечем их:

$$80 - P = P - 40$$

$$P = 60$$

Мы получили равновесную цену товара. Чтобы найти равновесное количество, достаточно подставить равновесную цену в любую функцию (так как они равны): $Q = 80 - P = 20$.

Равновесие показывает устойчивое количество и цену, которые скорее всего сложатся на рынке. Если спрос не пересекается с предложением, то говорят, что на таком рынке не существует равновесия.

Дефицит и профицит

Ны рынке некоторых товаров может сложиться ситуация, когда цена не является равновесной, то есть она либо выше, либо ниже ее. В долгосрочной перспективе такая цена является неустойчивой, однако анализ таких ситуаций также иногда встречается в олимпиадных задачах.

Ситуация, когда предложение при определенной цене превышает спрос при этой цене, называется профицитом товара. Профицит товара можно высчитать количественно: он равен разности предложения и спроса при определенной цене.

Например, если спрос и предложение заданы функциями $Q_d = 10 - P$ и $Q_s = P$ (равновесие находится при $P = 5$ и $Q = 5$), то при цене $P = 7$ предлагаться будет 7 единиц товара, а потребители будут желать приобрести только 3 единицы товара. Таким образом, на рынке будет наблюдаться профицит товара в размере 4 единиц. Профит товара обычно наблюдается, если цена товара выше равновесной.

Аналогично, дефицит появляется при превышении величины спроса над величиной предложения, и аналогично может быть найден в количественном исчислении. Обычно дефицит появляется, если цена товара оказывается меньше равновесной.

Краткосрочный и долгосрочный периоды

Есть небольшое отличие краткосрочного и долгосрочного периодов на рынке совершенной конкуренции. Считается, что в краткосрочном периоде фирма не может зайти или выйти с рынка, тогда как в долгосроном периоде она может сделать это.

Такое отличие приводит нас к интересному факту:

> На рынке совершенной конкуренции в долгосрочном периоде цена складывается на уровне минимума AC фирм.

Объяснение этого довольно простое (вспоминаем или заново читаем теорию фирмы): Если цена была бы выше минимума AC, то на этом рынке можно получить положительную прибыль. Соответственно, на данный рынок выгодно зайти другим фирмам. Увеличение числа фирм приводит к увеличению предложения товара, что ведет к снижению цены. Цена будет снижаться пока фирмам выгодно заходить на рынок, то есть до того момента, пока не достигнем минимума AC фирм. Как только она достигнет этого значения, на данном рынке больше нельзя будет получить положительную прибыль.

Аналогично, если цена ниже минимума AC, то фирмам будет выгодно уходить с рынка из-за того, что при любом производимом количестве они несут убытки. Уменьшение количества фирм приводит к снижению предложения товара. Уменьшение предложения ведет к увеличению цены. Фирмы будут уходить из отрасли до того момента, пока цена не поднимется до уровня минимума AC.

Взаимодействие и сдвиги рынков

В реальной экономике практически все рынки оказывают влияние друг на друга. В этом разделе мы разберем, как изменения в одной отрасли будут влиять на другие.

Важно понимать, что любое изменение цены или торгуемого количества товара является результатом изменения либо спроса, либо предложения. Сдвиги предложения обосновываются причинами, влияющими на производителей товара (например, изменение издержек или изменение урожайности для сельскохозяйственных рынков). Сдвиги спроса обосновываются причинами, влияющих на потребителей товара (например, изменение дохода или проведение рекламных акций, увеличивающих спрос).

Рассмотрим взаимодействие рынков на конкретном примере:

Рассмотрим рынок древесины. Из древесины производятся каркасы для кроватей, из которых, собственно, производятся кровати. Однако, для полноценной кровати нужен еще и матрас, который производится из шерсти. Наши рынки выглядят следующим образом:

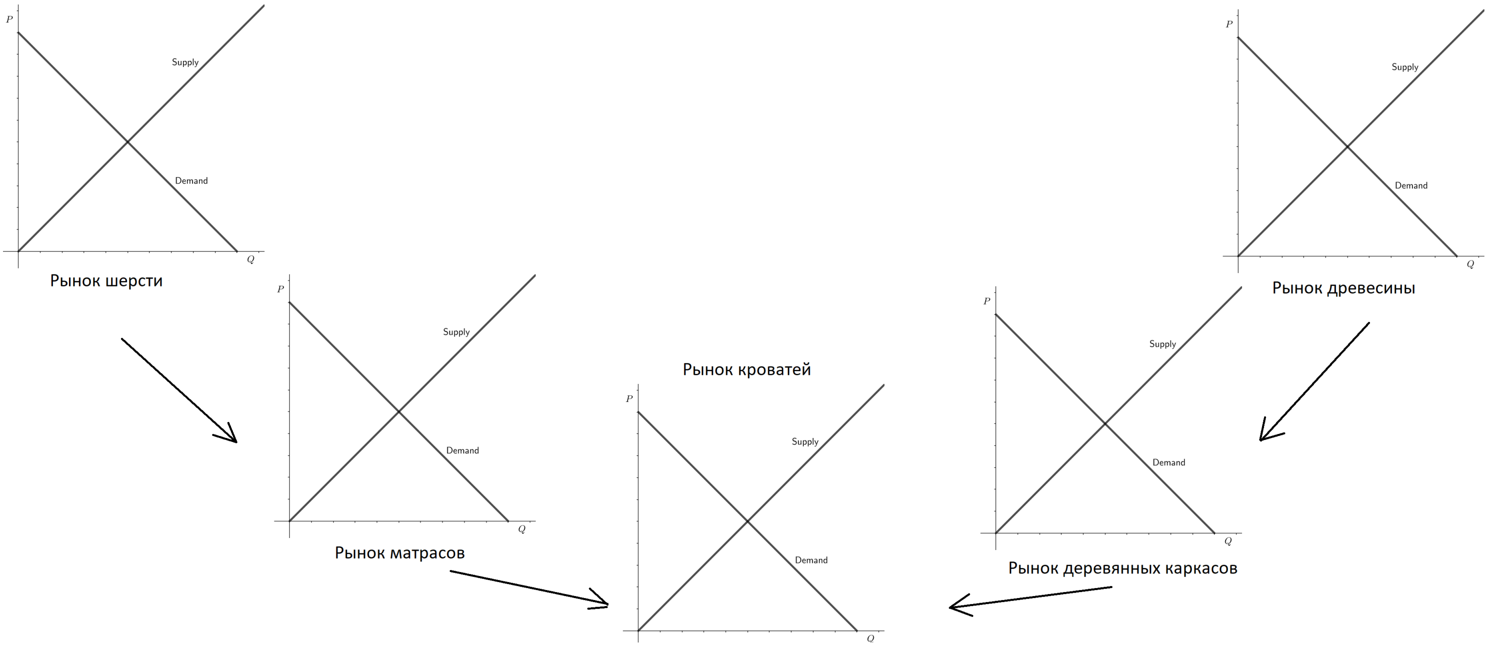


Рис. 51: Взаимодействие рынков

Здесь мы видим, что на каждом рынке есть свой спрос и свое предложение товара. Теперь представим, что правительством было принято решение о более жестком регулировании вырубки лесов. Такое решение влияет на производителей древесины и приведет к снижению предложения древесины:

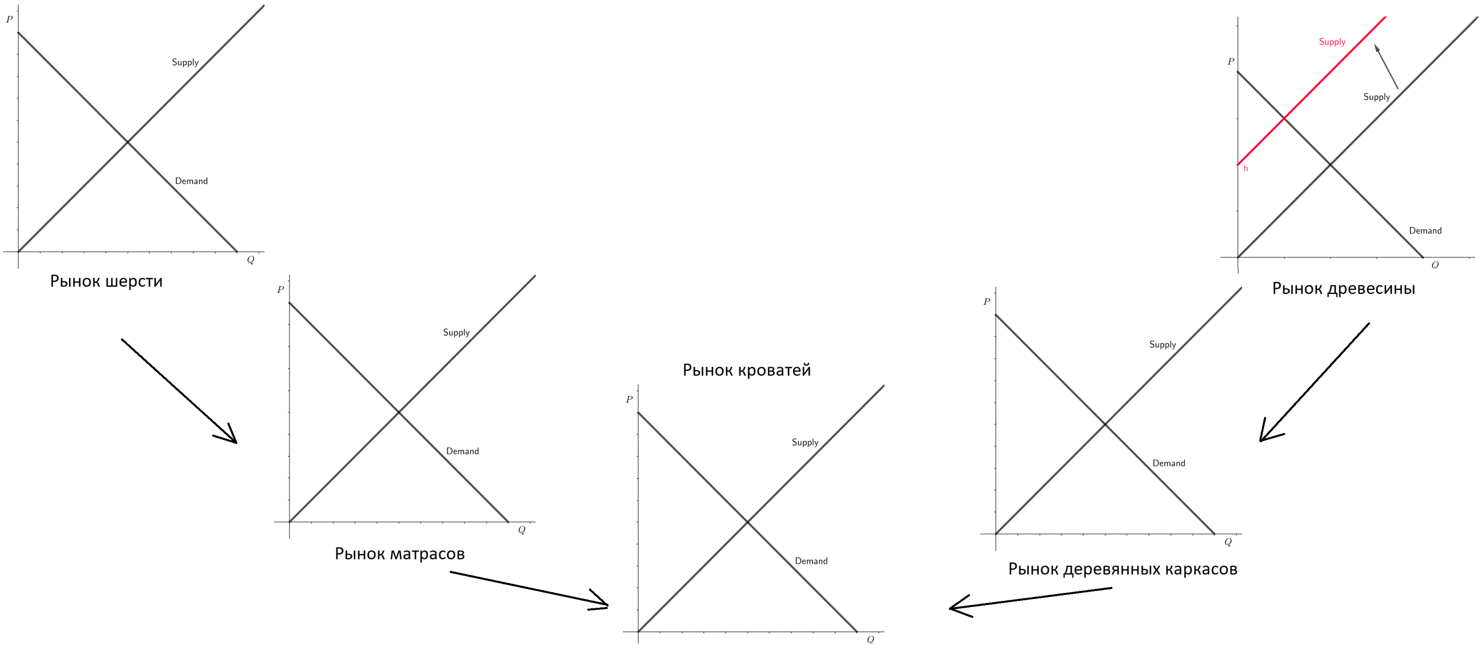


Рис. 52: Уменьшение предложения на рынке древесины

Не очень интуитивный факт: предложение уменьшается влево и вверх, так как при каждом значении цены теперь предлагается меньшее количество товара. Посмотрим на новое равновесие: теперь на рынке продается меньшее количество древесины по большей цене. Следовательно, издержки производителей каркасов возрастают, и им достается меньше древесины, из-за чего теперь уже на рынке древесины падает предложение. Затем, из-за того же самого эффекта, падает и предложение на рынке кроватей, которые производятся из каркасов:

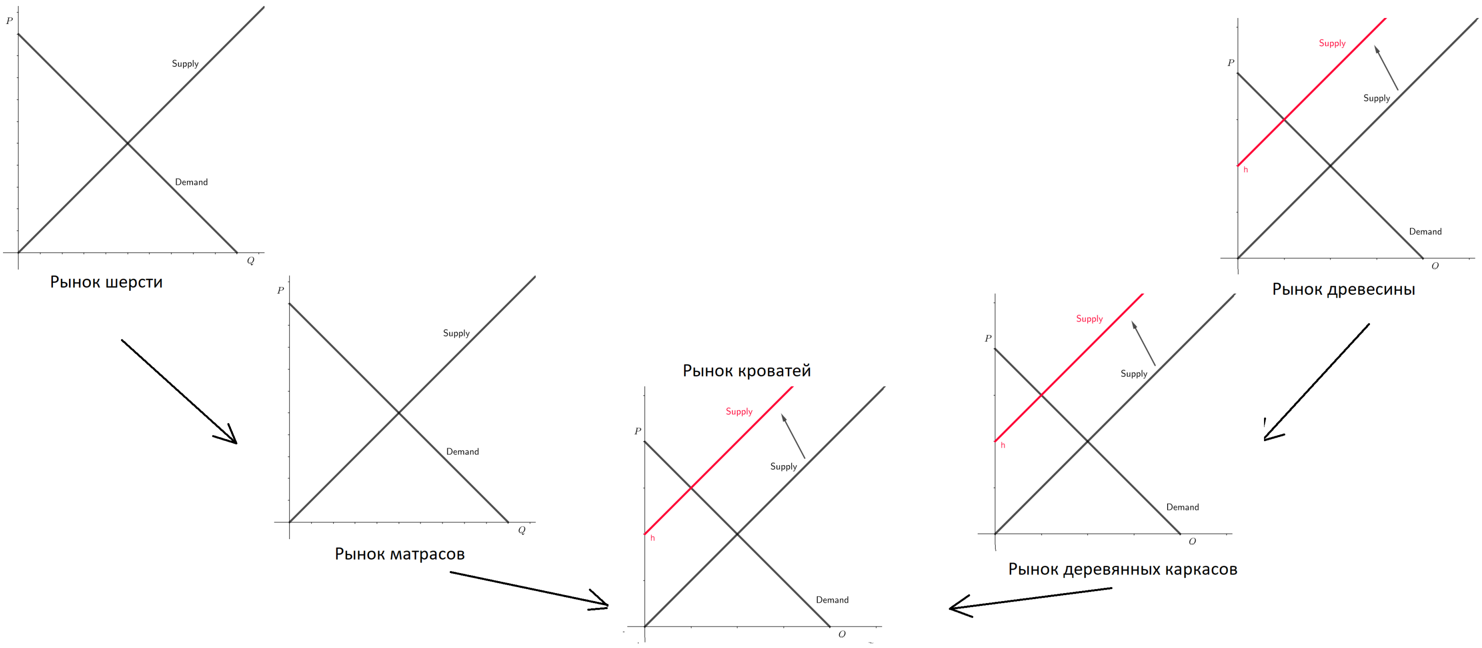


Рис. 53: Уменьшение предложения еще на двух рынках

Так как для производства кроватей нужны матрасы, то производители кроватей оказывают спрос на рынок матрасов. Из-за того, что равновесное количество кроватей снизилось, то их производители уменьшают свой спрос на матрасы, из-за чего равновесное количество матрасов падает, что в свою очередь приводит к уменьшению спроса на рынке шерсти (так как производители матрасов оказывают спрос на шерсть):

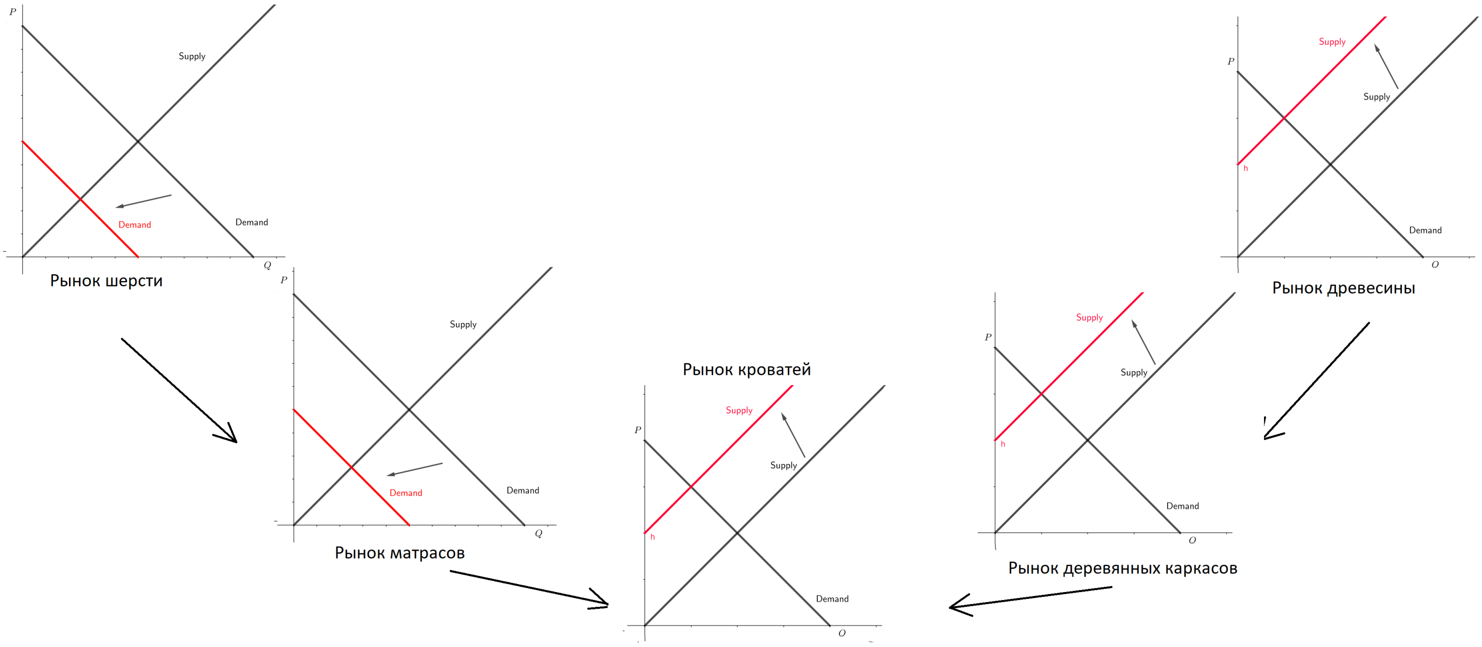


Рис. 54: Уменьшение спроса на остальных рынках

Вот мы и рассмотрели один пример взаимодействия рынков. Обычно такие задачи встречаются в тестах на олимпиадах, где надо соответствующей цепочкой объяснить изменения цен на различных рынках.

Международная торговля

После того, как мы обсудили, как работает рынок совершенной конкуренции, настало время рассмотреть его взаимодействия с рынками такого же товара в других странах/регионах.

При разборе международной торговле мы обязательно столкнемся с понятиями **импорт** и **экспорт**. В случае, когда страна является импортером (закупает товар у других стран) всегда считается, что сначала потребители приобретают товар у внутренних производителей и только потом у внешних. В случае, когда страна является экспортером считается, что производители продают товар сначала внутренним потребителям, и только потом внешним.

Страна является импортером товара в случае, когда **мировая цена**(обычно обозначается как P_w) оказывается ниже **равновесной цены** внутри страны. В таком случае, потребителям будет выгоднее приобрести товар зарубежом, что они и сделают. Страна будет являться экспортером в случае, если **мировая цена** оказывается выше **равновесной цены** внутри страны. Аналогично, в таком случае производителям становится выгоднее продавать товар за рубеж, что они и будут делать.

Автаркией называется страна, которая ни с кем не торгует. Довольно часто равновесную цену внутри страны при отсутствии торговли называют **ценой автаркии**.

В общем случае, теорию по рынкам в международной торговле можно разделить на две категории: рассмотрение рынков **малой** и **крупной** страны. Отличия между данными случаями заключаются в том, что положение дел в **малой** стране не влияют на мировую цену, а объем торговли **малой** страны несоизмерим с мировым объемом торговли. Для **крупной** страны все наоборот: ситуация на ее рынке влияет на мировую цену, а объем торговли значителен и соизмерим с мировым объемом торговли.

Мы рассмотрим примеры задач на каждый тип торговли в соответствующих разделах.

Международная торговля малой страны

Характерная черта данного сценария - наличие для страны международного рынка с фиксированной ценой и возможностью продать и купить сколько угодно товара по этой фиксированной цене.

В таком случае довольно просто определить, является ли страна экспортером или импортером товара: достаточно просто сравнить мировую цену с равновесной ценой внутри страны.

В случае торговли малой страны с миром, помимо внутреннего спроса (*Domestic Demand*) возникает также внешний спрос (*External Demand*). Также, помимо внутреннего предложения (*Domestic Supply*) возникает внешнее предложение (*External Supply*). Заметим, что так как мировая цена фиксирована и по ней можно продать и купить любое количество товара, то и внешнее предложение, и внешний спрос будут являться горизонтальными. Посмотрите на примерные графики всех этих функций:

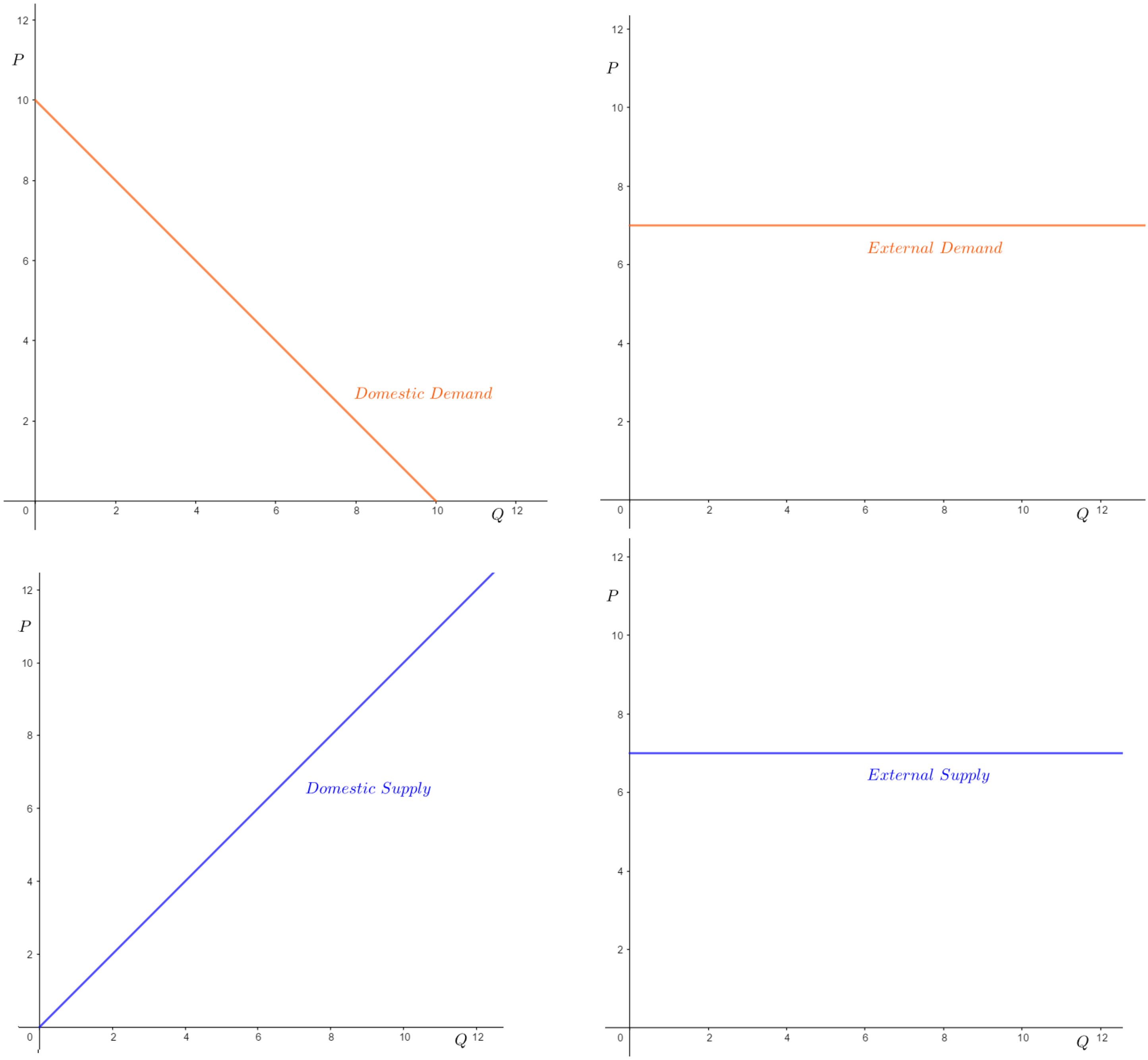


Рис. 55: Спросы и предложения в модели малой экономики

Как вы можете заметить, внешнее предложение совпадает с внешним спросом. Сложив внутренние спросы и предложения между собой, мы можем получить совокупный спрос (*Aggregated Demand*) и совокупное предложение (*Aggregated Supply*) внутри страны. Сложим данные графики и посмотрим, что получится:

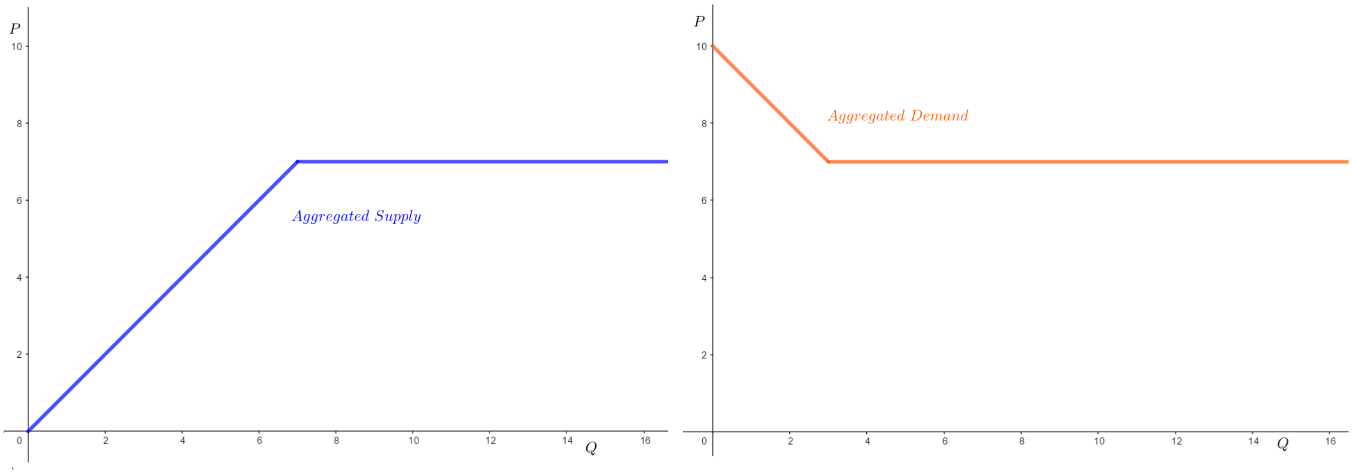


Рис. 56: Совокупные спрос и предложение в малой экономике

Теперь мы можем пересечь их и, наконец, посмотреть на ситуацию, складывающуюся на рынке:

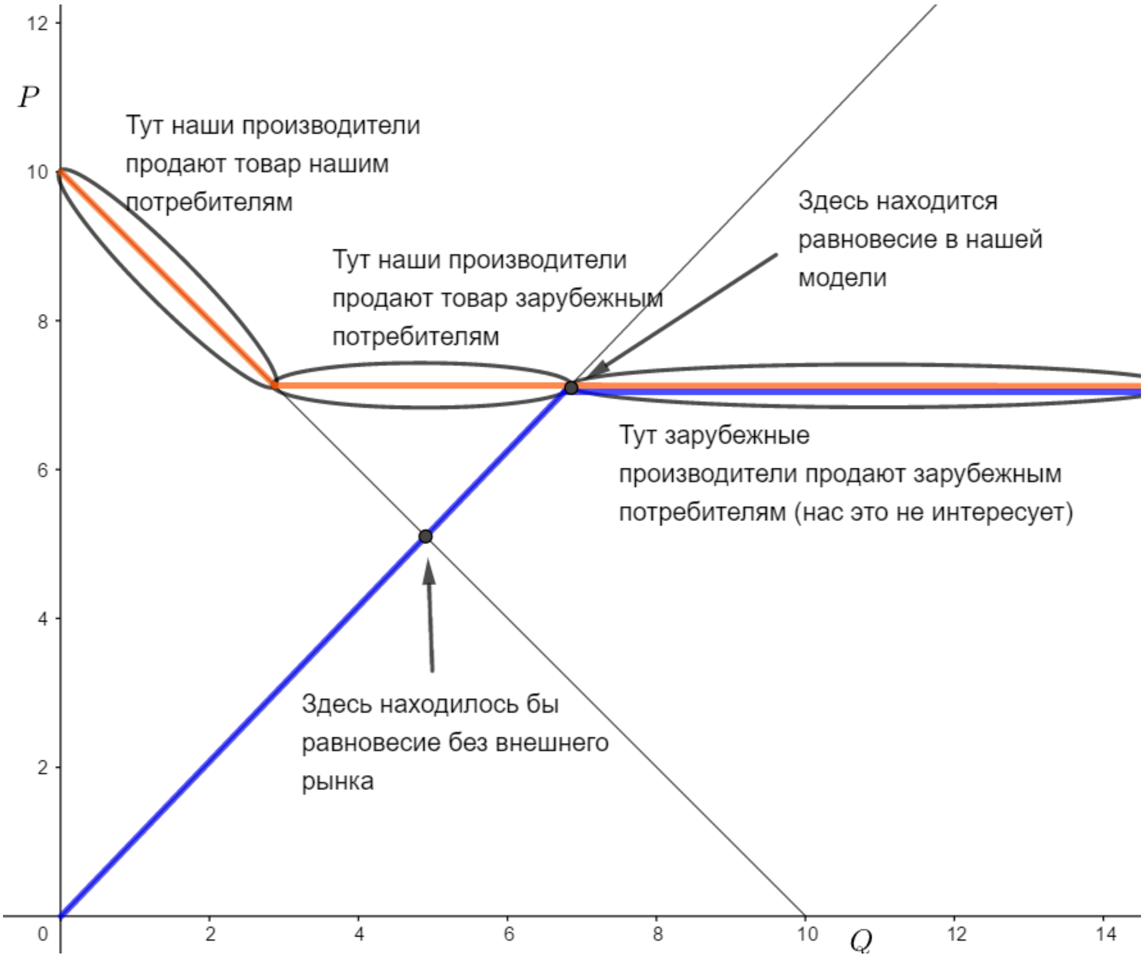


Рис. 57: Малая экономика

Здесь мы рассматриваем ситуацию, в которой мировая цена больше цены автаркии. В таком случае наша страна является экспортером товара. Также видно, что в равновесии при отсутствии ограничений на торговлю цена оказывается равна мировой цене.

При такой цене в отсутствии торговли на нашем рынке был бы профицит товара. Именно размер этого профицита и будет является объемом нашего экспорта. Другими словами, на экспорт идет произведенное количество товара, которое производители не смогли продать внутри страны по мировой цене. Для большей наглядности также рассмотрим ситуацию, в которой спрос, предложение и мировая цена имеют соответствующие функции:

$$Q_d = 10 - P$$
$$Q_s = P$$
$$P_w = 7$$

В таком случае равновесная цена будет равна 7: $P = P_w = 7$. Тогда объем предложения составит $Q_s = P = 7$, а объем спроса - $Q_d = 10 - P = 3$. Следовательно, в стране возникает профицит товара в размере $Q_s - Q_d = 4$, который и пойдет на экспорт.

Все будет абсолютно аналогичным (с точностью наоборот) для импорта. Страна импортирует то количество товара, которое оказывается в дефиците при мировой цене ниже равновесной.

Международная торговля крупных стран

Теперь настало время поговорить в взаимодействии рынков тех стран, которые влияют на цену товара. Сразу же будем разбирать ситуацию на примере конкретной задачи с тремя странами.

Допустим, у нас в мире есть три страны (A, B и C), которые имеют возможность торговли друг с другом. Спросы и предложения в этих странах заданы следующими уравнениями:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ Q_d = 120 - P_a & Q_d = 150 - P_b & Q_d = 180 - P_c \\ Q_s = P_a - 30 & Q_s = P_b - 90 & Q_s = P_c - 150 \end{array}$$

Для начала давайте определимся, какая из стран будет импортером, а какая - экспортером товара. Для этого расчитаем внутренние равновесия для стран:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 120 - P_a = P_a - 30 & 150 - P_b = P_b - 90 & 180 - P_c = P_c - 150 \\ P_a = 75 & P_b = 120 & P_c = 165 \\ Q_a = 45 & Q_b = 30 & Q_c = 15 \end{array}$$

Как мы видим, в стране A цена самая низкая, а в стране C - самая высокая. Следовательно, если страны откроются для торговли, между друг другом, то страна A точно будет экспортером (производителям страны A выгодней продавать товар и в страну B и в страну C, так как там цены выше, чем если продавать внутрь страны). Аналогично, страна C точно будет импортером.

А что же будет со страной B? Есть несколько способов определить, является ли она экспортером или импортером.

Нахождение мирового равновесия

На самом деле, несмотря на кажущуюся сложность нахождения равновесия при торговле между этими странами (мы даже не знаем, экспортирует или импортирует товар страна B), мы можем очень просто найти равновесную мировую цену товара, которая сложится, если все три страны будут торговать друг с другом.

Для этого достаточно просто сказать, что мировой (совокупный) спрос будет равен мировому (совокупному) предложению стран. Для этого сначала найдем функции суммарного спроса и суммарного предложения:

$$Q_d = \begin{cases} 0 & P > 180 \\ 180 - P & 150 < P \leqslant 180 \\ 330 - 2P & 120 < P \leqslant 150 \\ 450 - 3P & P \leqslant 120 \end{cases} \qquad Q_s = \begin{cases} 0 & P < 30 \\ P - 30 & 30 \leqslant P < 90 \\ 2P - 120 & 90 \leqslant P < 150 \\ 3P - 270 & 150 \leqslant P \end{cases}$$

Теперь, собственно, нужно найти точку, в которой спрос пересекает предложение. Для кусочных функций крайне советую строить графики, отмечая точки перегиба. В основном это нужно для того, что увидеть, на каком куске у нас будет пересечение:

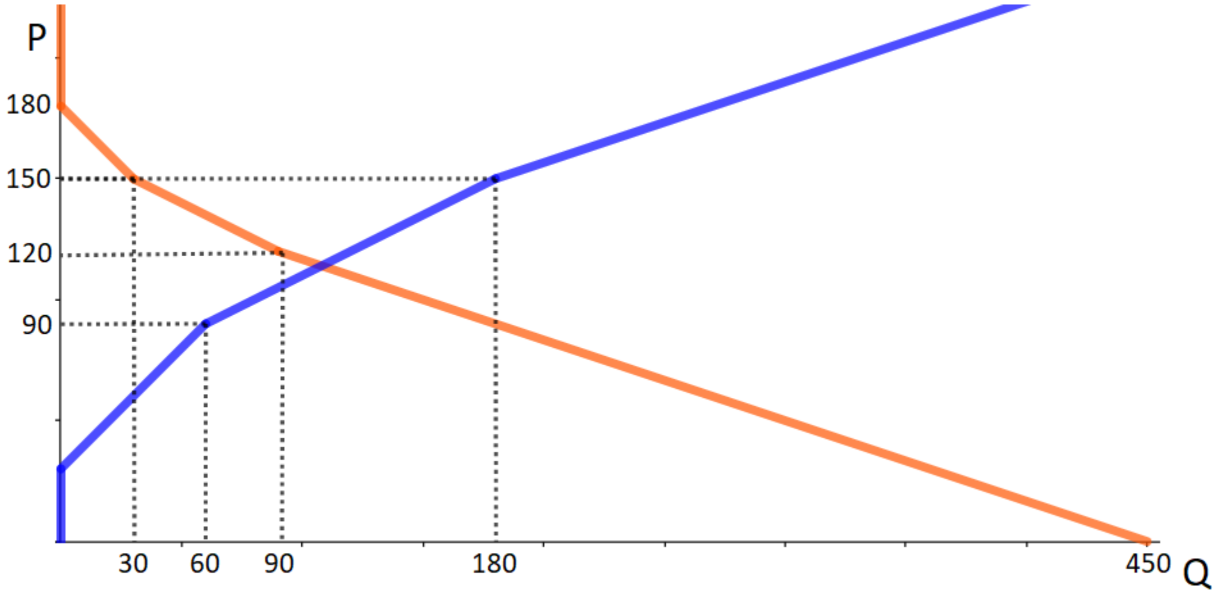


Рис. 58: Суммарные спрос и предложение

Как мы можем увидеть, пересекаются последний участок спроса с предпоследним участок предложения. Это, в частности, значит, что страна C не будет производить товар в равновесии, как как равновесная цена будет ниже 150, а ее предложение существует только при $P > 150$.

Теперь нам осталось найти, собственно, точку пересечения (равновесие):

$$450 - 3P = 2P - 120$$

$$570 = 5P$$

$$P^* = 114$$

$$Q^* = 108$$

Таким образом, мы нашли мировую цену, которая сложится в равновесии, а также общее количество товара, которое будет произведено и приобретено в мире. Также, теперь мы можем определить, является ли страна B экспортером или импортером. Мы знаем, что равновесная цена автаркии в стране B равна 120, что больше 114. Следовательно, при цене 114 в стране будет дефицит товара и она будет его импортировать.

Мы можем узнать больше информации, если это необходимо в задаче. Например, если нам интересно, сколько производит страна A, достаточно подставить найденную цену в ее функцию предложения. $Q_s = P - 30 = 114 - 30 = 84$. Если мы также посмотрим, сколько товара потребили в стране A: $Q_d = 120 - P = 6$, то мы сможем найти объем экспорта: $Ex = Q_s - Q_d = 78$.

Функции экспорта и импорта

Есть еще один вариант нахождения мирового равновесия. Для того нам понадобится выводить функции экспорта и импорта для каждой страны. Естественно, в таком случае нам нужно понимать, какая страна является импортером, а какая - экспортером товара (ведь глупо было бы находить функцию импорта для страны-экспортера).

Данный вариант нахождения равновесия эффективен при решении задач с государственным вмешательством в мировую торговлю (государственное вмешательство будет обсуждаться в дальнейших секциях учебника).

В случае двух стран все просто: та страна, у которой внутренняя равновесная цена меньше, будет экспортировать товар, а вторая - импортировать. Но мы с вами сразу разберем ситуацию с тремя странами, чтобы понять все тонкости. Также я немного изменю числа, чтобы мы заранее не знали ответ.

Итак, рассмотрим три страны, тогующие друг с другом:

A	B	C
$Q_d = 60 - 2P_a$	$Q_d = 60 - P_b$	$Q_d = 45 - P_c$
$Q_s = P_a$	$Q_s = 2P_b - 30$	$Q_s = 3P_c - 15$

Найдем равновесные цены автаркии в каждой стране:

$$P_a = 20$$
$$P_b = 30$$
$$P_c = 15$$

Таким образом, мы сразу же знаем, что страна C будет являться экспортером, а страна B - импортером товара. Давайте же найдем их функции экспорта и импорта. Находить их можно, пользуясь тем, что объем экспорта равен объему профицита товара в стране, а объем импрота равен объему дефицита: $Ex = Q_s - Q_d$, $Im = Q_d - Q_s$.

Также в данных функциях можно даже не учитывать некоторые ограничения. Например, сначала попробуем выписать функцию импорта страны B. В таком случае нам вообще не нужно рассматривать интервал цен $P > 30$, так как предполагаем, что страна будет импортировать товар и цена будет меньше равновесной внутри страны.

Таким образом, функция импорта страны B будет иметь вид (не забываем, что при $P < 15$ функция предложения станет равна 0):

$$Im_b = Q_d - Q_s = \begin{cases} 60 - P - 2P + 30 & P > 15 \\ 60 - P - 0 & P \leqslant 15 \end{cases} = \begin{cases} 90 - 3P & P > 15 \\ 60 - P & P \leqslant 15 \end{cases}$$

Аналогично, найдем функцию экспорта страны C (не забываем, что в таком случае нам не интересны $P < 15$, однако, при $P > 15$ в какой то момент спрос становится равен 0).

Таким образом, функция экспорта страны C будет иметь следующий вид:

$$Ex_c = Q_s - Q_d = \begin{cases} 3P - 15 - 45 + P & P < 45 \\ 3P - 15 - 0 & P \geqslant 45 \end{cases} = \begin{cases} 4P - 60 & P < 45 \\ 3P - 15 & P \geqslant 45 \end{cases}$$

Отлично. Но для решения задачи нам необходимо понять, экспортирует или импортирует товар страна A. Есть один инетерсный способ: мы посмотрим, какая цена сложится в торговле между странами B и C, а затем сравним ее с равновесной внутренней ценой в A. Если цена в A окажется меньше, то ее производителям будет выгодно поставлять товар на рынок стран B и C и наоборот.

Чтобы найти равновесие в торговле, достаточно приравнять функции экспорта и импорта стран. Ведь все, что какие-то страны экспортируют, другие страны импортируют:

$$Im_b = \left\{ \begin{array}{ll} 90 - 3P & P > 15 \\ 60 - P & P \leqslant 15 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} 4P - 60 & P < 45 \\ 3P - 15 & P \geqslant 45 \end{array} \right. = Ex_c$$

Любым способом находим пересечение: $P^* = \frac{150}{7}$. Так как равновесная цена в стране A $P_a = 20 < \frac{150}{7}$, то страна A оказывается экспортером на мировом рынке. Тогда нам нужно найти функцию ее экспорта (аналогично со страной C). Не забываем, что при $P > 30$ спрос становится равен 0.

$$Ex_a = Q_s - Q_d = \left\{ \begin{array}{ll} P - 60 + 2P & P < 30 \\ P - 0 & P \geqslant 30 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} 3P - 60 & P < 30 \\ P & P \geqslant 30 \end{array} \right.$$

У нас получилось две страны - экспортера и одна страна-импортер. Теперь нам нужно приравнять суммарный экспорт к суммарному импорту. Для этого нам нужно сложить экспорты двух стран:

$$Ex_a + Ex_c = \left\{ \begin{array}{ll} 3P - 60 & P < 30 \\ P & P \geqslant 30 \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{ll} 4P - 60 & P < 45 \\ 3P - 15 & P \geqslant 45 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} 4P - 15 & 45 \leqslant P \\ 5P - 60 & 30 \leqslant P < 45 \\ 7P - 120 & P < 30 \end{array} \right.$$

Теперь, наконец, можем приравнять суммарный экспорт к суммарному импорту:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 90 - 3P & P > 15 \\ 60 - P & P \leqslant 15 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} 4P - 15 & 45 \leqslant P \\ 5P - 60 & 30 \leqslant P < 45 \\ 7P - 120 & P < 30 \end{array} \right.$$

Находим равновесие (желательно с помощью графика), и получаем $P^* = 21$. Далее, опять же, можем высчитать все нужные нам количества, просто подставляя равновесную мировую цену в соответствующие функции. Например, экспорт страны A будет равен $3P - 60 = 3$, а производство страны B будет равно $2P - 30 = 12$.

Монополия

Монополия - рыночная структура, в которой на рынке некого товара присутствует единственная фирма, обладающая полной рыночной властью и сама назначающая цену на свой товар. Единственное, чем ограничена фирма в таком случае - это спрос на товар. Во всех задачах предполагается, что фирма знает спрос и может назначать цену исходя из него и своей функции издержек.

Классическая оптимизация фирмы

Классические задачи на монополию решаются довольно просто. Как обычно, мы с вами рассмотрим два метода оптимизации: с помощью основной и предельных функций.

Метод основной функции (в лоб)

Обычно в задачах ставиться вопрос о том, какую цену назначит монополист на свой товар. Для выбора оптимальной цены и оптимального количества товара монополии необходимы функция спроса на товар и функция издержек фирмы.

Рассмотрим следующую задачу с данной функцией издержек и функцией спроса:

$$TC = Q^2 + 20Q$$

$$Q_d = 120 - P$$

Выписываем функцию прибыли:

$$\Pi = TR - TC = PQ - Q^2 - 20Q$$

В отличии от совершенного конкурента, для монополиста цена не является заданной извне. Однако, он знает объем продукции, который у него приобретут, в зависимости от цены, которую установит, то есть, по сути, функцию спроса. Так что он может использовать эту зависимость в своей оптимизации.

Другими словами, мы можем подставить функцию спроса в нашу прибыль:

$$P = 120 - Q$$

$$\Pi = PQ - Q^2 - 20Q = (120 - Q)Q - Q^2 - 20Q = 100Q - 2Q^2 \xrightarrow{Q} max$$

$$Q^* = 25$$

$$P^* = 120 - Q^* = 95$$

Таким образом, мы нашли оптимальные объем производства и оптимальную цену товара, которые выберет монополия. Конечно, можно выражать прибыль через цену следующим образом:

$$Q_d = 120 - P$$

$$\Pi = PQ - Q^2 - 20Q = P(120 - P) - (120 - P)^2 - 20(120 - P) \xrightarrow{P} max$$

Однако, так как издержки фирмы выражены через Q, выражать прибыль через P довольно нерационально, хотя результат получается тот же.

Максимизация через предельные функции

Будем решать ту же самую задачу:

$$TC = Q^2 + 20Q$$
$$Q_d = 120 - P$$

Как и в совершенной конкуренции, здесь нам пригодятся функции MR и MC. И если предельные издержки точно такие же, как и в предыдущей секции, то предельная выручка уже другая. Однако, высчитать ее функцию довольно просто:

$$TR = PQ = (120 - Q)Q = 120Q - Q^2$$
$$MR = TR' = 120 - 2Q$$

Также нам нужны MC:

$$TC = Q^2 + 20Q$$
$$MC = TC' = 2Q + 20$$

Посмотрим на графики наших предельных функций:

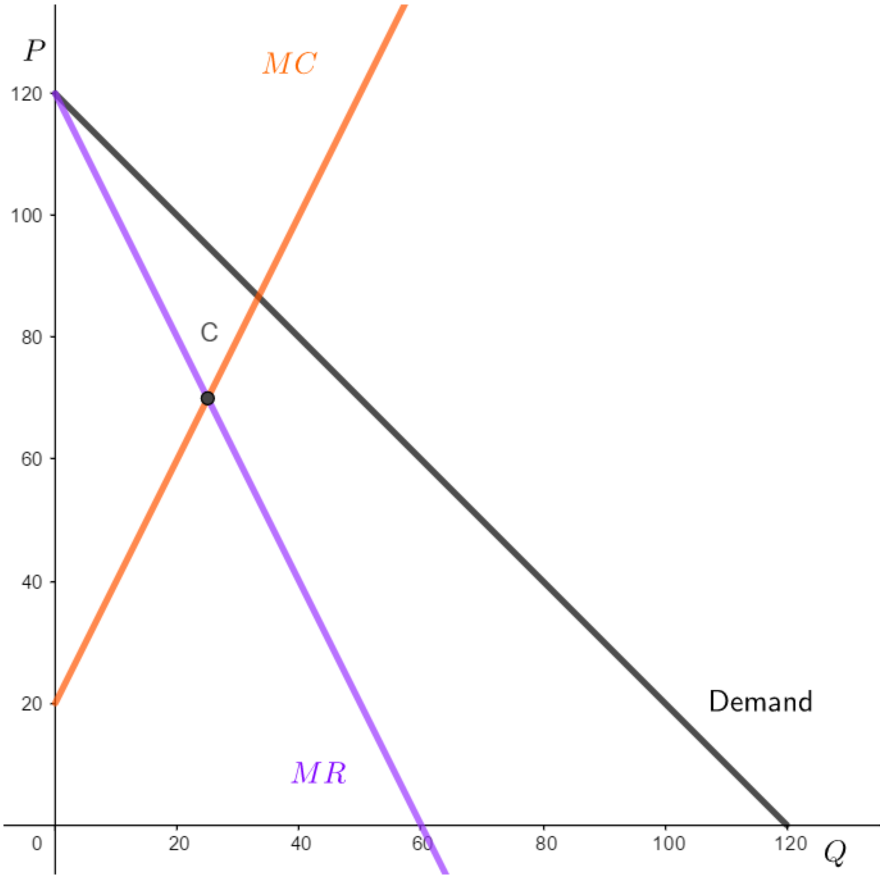


Рис. 59: MR и MC в монополии

Как и в совершенной конкуренции, нас интересуют площади прибылей и убытков между MR и MC. Если для какой-то единицы товара $MR > MC$, то фирма получает с него прибыль, а если $MR < MC$, то несет убыток:

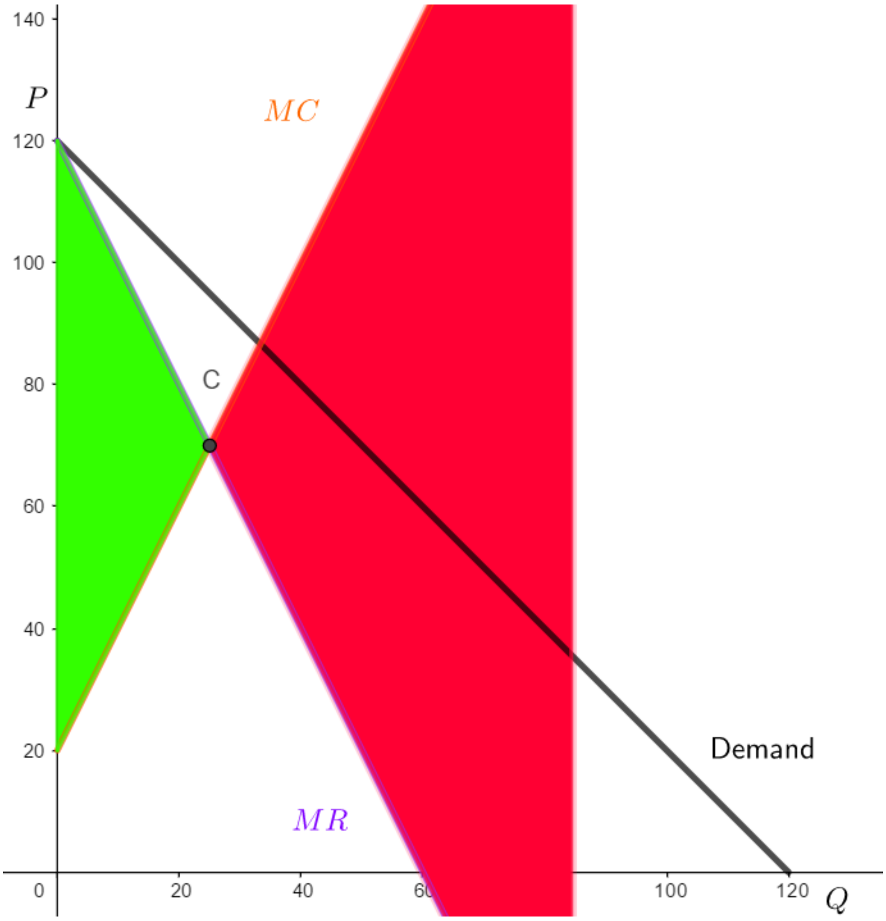


Рис. 60: Прибыли и убытки

Видно, что до точки C $MR > MC$, и с каждой единицы фирма получает прибыль, а после точки C за каждую единицу получает убыток. Следовательно, монополист будет производить товар до точки C, а затем перестанет. Таким образом, оптимум в нашем случае будет в точке пересечения MR и MC. Осталость только его найти:

$$MR = MC$$

$$120 - 2Q = 20 + 2Q$$

$$Q^* = 25$$

$$P^* = 120 - Q^* = 95$$

Кстати, заметьте несколько интересных фактов при MR:

Во-первых, MR для монополиста всегда меньше, чем цена товара. С первого взгляда это может показаться странным утверждением: ведь MR показывает, на сколько увеличится выручка монополиста при продаже дополнительной единицы товара. Логично было бы, если выручка вырастала ровно на цену этого товара (что происходит в индивидуальной оптимизации совершенного конкурента). Однако, в отличие от совершенного конкурента, монополист должен учитывать, что, чтобы продать дополнительную единицу товара, ему придется снизить цену (из-за того, что величина спроса отрицательно зависит от цены). Таким образом, продав еще одну единицу товара, он потеряет выручку со всех уже проданных единиц. В итоге, его выручка вырастет на меньшую величину, чем цена товара.

Во-вторых, MR вообще может стать отрицательным (в нашем случае это происходит при $Q > 60$), если при продаже дополнительной единицы товара мы с нее получим меньше, чем потеряем из-за того, что вынуждены продавать весь остальной товар из-за более низкой цены.

Кстати, условие $MR = MC$ довольно часто пропагандируют как универсальный оптимум в задачах с монополией. Я бы не советовал пользоваться этим правилом без проверки и объяснений, которые я привел выше. Почему же $MR = MC$ все же довольно часто является оптимумом прибыли? Да потому что это условие является экстремумом прибыли (Точкой, где производная равна 0):

$$\Pi = TR - TC$$

$$\Pi' = TR' - TC' = MR - MC = 0$$

$$MR = MC$$

Однако, нулевая производная прибыли не гарантирует вам, что вы нашли **максимум**. Это вполне может оказаться минимум или вообще какая-то случайная точка. Так что, рисуйте графики, господа.

Модель монополиста в международной торговле

Здесь мы рассмотрим ситуацию, в которой монополия оказывает посредником при торговле между собой нескольких стран (например, если эти страны объявили друг другу санкции и не торгую напрямую). Рассмотрим следующие две страны, торговля между которыми в текущий момент времени не ведется:

A	B
$Q_d = 180 - P_a$	$Q_d = 90 - P_b$
$Q_s = 2P_a$	$Q_s = 2P_b$

Можем найти внутренние цены в каждой стране, приравняв их внутренние спросы и предложения. В стране A цена будет равна 60, а в стране B будет равна 30, то есть в условиях открытой торговли страна A была бы импортером, а B – экспортером товара.

Однако так как торговля между странами закрыта, появилась возможность заработать на перевозках товара через «третьи страны», и этой возможностью воспользуется наша фирма-монополист. Эта фирма закупает товар в стране B и продает его в стране A, забирая себе в карман разницу цен (цены же она может определять самостоятельно, будучи ограничена только предложением страны B и спросом страны A).

В таком случае, как и в базовой модели международной экономики, у нас будет выполнятся условие, что покупатели покупают товар в первую очередь у своих производителей, и только потом у монополиста, и производители продают товар в первую очередь своим покупателям, и только потом монополисту. Получается, назначив цены P_a и P_b, монополист сможет выкупить профицит товара в стране B (это же – экспорт этой страны), и продать его в страну A, покрыв ее дефицит при цене P_a (это и будет импорт страны A). Заметьте, для реализации такого плана монополист должен названичть цену $P_b > 30$, чтобы создать профицит, и цену $P_a < 60$, чтобы создать дефицит. Также обратите внимание, что при таких ценах все количества спроса и предложения остаются положительными, то есть мы не будем рассматривать кусочные функции и будем смотреть на идейное решение модели.

Можем найти функцию дефицита (импорта) в стране A и функцию профицита (экспорта) в стране B:

$$Im_a = Q_d - Q_s = 180 - P_a - 2P_a = 180 - 3P_a$$

$$Ex_b = Q_s - Q_d = 2P_b - (90 - P_b) = 3P_b - 90$$

Заметьте, что для монополиста $Im_a = Ex_b = Q$, так как нет смысла покупать товар и его не продавать. За Q я обозначил общее количество товара, которое он купит или продаст. Теперь можем записать прибыль монополиста (напомню, он зарабатывает на разнице цен):

$$\Pi = (P_a - P_b) \cdot Q$$

Эту прибыль можно прооптимизировать разными способами, я сделаю это самым быстрым: выражу обратные функции экспорта и импорта и подставлю их в прибыль:

$$Im_a = Q_d - Q_s = 180 - P_a - 2P_a = 180 - 3P_a = Q$$

$$P_a = 60 - \frac{Q}{3}$$

$$Ex_b = Q_s - Q_d = 2P_b - (90 - P_b) = 3P_b - 90 = Q$$

$$P_b = 30 + \frac{Q}{3}$$

$$\Pi = (P_a - P_b) \cdot Q = (60 - \frac{Q}{3} - (30 + \frac{Q}{3})) \cdot Q = (30 - \frac{2}{3}Q) \cdot Q = 30Q - \frac{2}{3}Q^2 \xrightarrow{Q} max$$

$$Q = 22,5$$

$$P_a = 60 - \frac{Q}{3} = 52,5$$

$$P_b = 30 + \frac{Q}{3} = 37,5$$

Вот такие цены наша монополися установит в этих двух странах.

Дискриминация

До этого момента мы рассматривали ситуацию, в которой монополист обязан ставить одну цену для всех (например, как в магазине). Однако, существуют облтоятельства, при которых он может дискриминировать своих покупателей по цене. Запоминаем, что такое дискриминация:

Дискриминация - ситуация, в которой за абсолютно одинаковые блага платится различная цена.

Например, если продавец на рынке продаст Пете штаны за 400 рублей, а Васе те же самые штаны за 300, то это будет являться дискриминацией. Любые скидки пенсионерам также являются дискриминацией: в итоге пенсионеры и не-пенсионеры платят различную цену за одно и то же благо.

Очень часто дискриминацию путают с дифференциацией товара. Например, если разные зубные щетки (даже от одного производителя) продаются по разной цене, то это не является дискриминацией, так как товары различаются.

В экономике принято разделять дискриминацию на три типа. Мы разберем теорию решения задач для каждого из них.

Дискриминация 3 рода

Дискриминацией третьего рода называется ситуация, в которой монополист может выделить среди потребителей несколько различных групп и назначать этим группам различные цены. Например, все те же самые скидки пенсионерам, в результате которых различные группы населения покупают один и тот же товар по разным ценам.

При дискриминации 3 рода задачи можно разделить на сложные и простые на основании того, какой вид имеет функция издержек.

Предельные издержки постоянные

Допустим, монополист выделил две группы потребителей, предъявляющих спрос на его товар. Функции их спросов имеют следующих вид:

$$Q_1 = 160 - 2P$$

$$Q_2 = 90 - P$$

Задачей будет определить, какую цену он назначит для каждой группы. В нашем случае монополист будет иметь функцию издержек с постоянными предельными издержками:

$$TC = 30Q$$

$$MC = TC' = 30$$

В чем прелесть такой ситуации: мы можем разделить ее на две независимых оптимизации, так как **Издержки на продажу товара одной группе не зависят от количества товара, которое мы продали второй группе** (чтобы произвести каждую единицу товара нам просто требуется потратить 30 д.е.)

Таким образом, максимизируем просто две отдельные прибыли:

$$P_1 = 80 - \frac{Q_1}{2}$$

$$\Pi_1 = P_1Q_1 - TC = (80 - \frac{Q_1}{2})Q_1 - 30Q_1 \xrightarrow{Q_1} max$$

$$Q_1^* = 50$$

$$P_1 = 80 - \frac{Q_1}{2} = 55$$

$$P_2 = 90 - Q_2$$

$$\Pi_2 = P_2Q_2 - TC = (90 - Q_2)Q_2 - 30Q_2 \xrightarrow{Q_2} max$$

$$Q_2^* = 30$$

$$P_2 = 90 - Q_2 = 60$$

Задача решена.

Предельные издержки не постоянные

Гораздо сложнее решается ситуация, в которой издержки товара, продаваемого одной группе, зависят от количества товара, которое продается другой группе. Мы рассмотрим уже привычные нам два метода оптимизации для решения задач.

Метод основной функции (в лоб)

Рассмотрим задачу с двумя группами и функцией издержек монополиста:

$$P_1 = 90 - Q_1$$
$$P_2 = 60 - Q_2$$
$$TC = \frac{Q^2}{2} = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2}$$

Так как мы решаем в лоб, просто выпишем нашу прибыль:

$$\Pi = P_1Q_1+P_2Q_2-TC = (90-Q_1)Q_1+(60-Q_2)Q_2-\frac{(Q_1+Q_2)^2}{2} = 90Q_1-\frac{3Q_1^2}{2}+60Q_2-\frac{3Q_2^2}{2}-Q_1Q_2 \xrightarrow{Q_1,Q_2} max$$

Здесь мы выбираем две независимые переменные: Q_1 и Q_2, так что будем максимизировать функцию по двум переменным. Как это делать я уже объяснял в **Матаппарате**, но все же, давайте для закрепления полностью это проделаем. Будем максимизировать сначала по Q_1, а затем по Q_2.

По Q_1 данная функция имеет вид параболы ветвями вниз. Значит, оптимум в вершине:

$$Q_1^* = \frac{90 - Q_2}{3}$$

Проверяем на ограничение:

$$Q_1 \geqslant 0$$
$$\frac{90 - Q_2}{3} \geqslant 0$$
$$Q_2 \leqslant 90$$

Однако, заметим, что мы не будем продавать $Q_2 > 90$, так как по спросу ограничены $Q_2 \leqslant 60$. Тогда $Q_1 = \frac{90-Q_2}{3}$ всегда будет являться оптимумом. Подставим найденный оптимум обратно в функцию:

$$\Pi = \frac{(90-Q_2)^2}{6} + 60Q_2 - \frac{3Q_2^2}{2} = 1350 - 30Q_2 + \frac{Q_2^2}{6} + 60Q_2 - \frac{3Q_2^2}{2} = 1350 + 30Q_2 - \frac{4Q_2^2}{3}$$

Данная функция также является параболой ветвями вниз. Найдем вершину по Q_2:

$$Q_2^* = \frac{90}{8}$$

Мы нашли оптимум, так как $0 \leqslant \frac{90}{8} \leqslant 90$. Найдем тогда оставшееся количество и, соответственно, цены:

$$Q_1 = \frac{90 - Q_2}{3} = \frac{90 - \frac{90}{8}}{3} = \frac{630}{24} = \frac{105}{4}$$
$$P_1 = 90 - Q_1 = 90 - \frac{105}{4} = \frac{255}{4}$$
$$P_2 = 60 - Q_2 = 60 - \frac{90}{8} = \frac{195}{4}$$

Метод предельных функций

Это решение, как вы может быть уже догадываетесь, заключается в построении функций MR и MC монополиста. Данный метод довольно эффективен, если есть более двух групп потребителей.

Рассмотрим предыдущую задачу:

$$P_1 = 90 - Q_1$$
$$P_2 = 60 - Q_2$$
$$TC = \frac{Q^2}{2}$$

Итак, с функцией MC здесь все ясно:

$$MC = TC' = Q$$

Теперь нам нужна общая функция $MR(Q)$. Для начала выведем функции MR для каждого спроса:

$$MR_1 = TR_1' = P_1Q_1' = (90Q_1 - Q_1^2)' = 90 - 2Q_1$$
$$MR_2 = TR_2' = P_2Q_2' = (60Q_2 - Q_2^2)' = 60 - 2Q_2$$

Теперь нам нужно найти оптимальное распределение общего Q на Q_1 и Q_2 с помощью предельных функций. Для удобства в таких случаях очень подойдет график, который я рисую следующим образом:

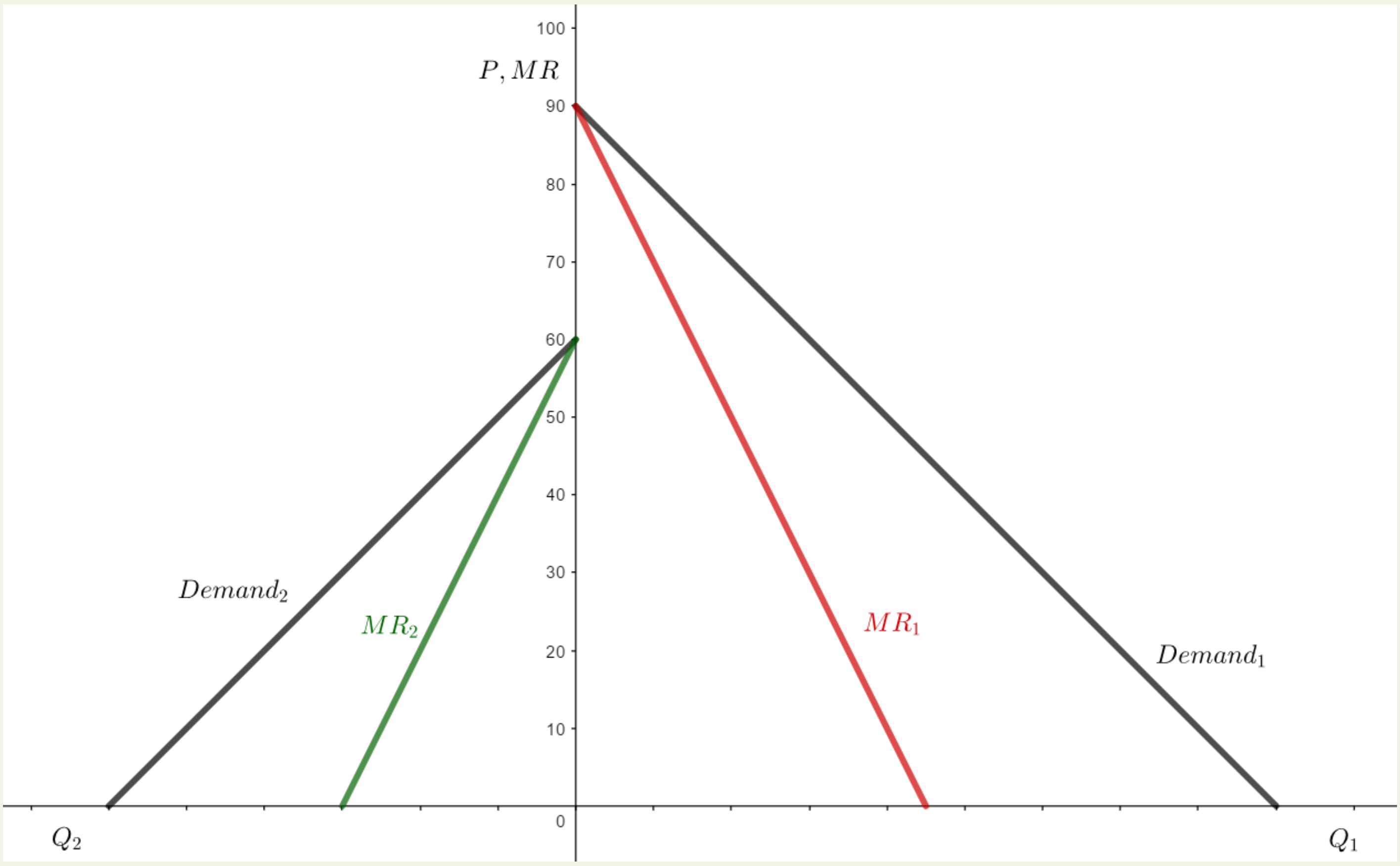


Рис. 61: MR на двух рынках

Как вы можете увидеть, при $Q = 0$ $MR_1 > MR_2$. Следовательно, сначала мы будем продавать наш товар первой группе потребителей, пока он не дойдет до уровня второй группы. Давайте найдем этот момент. Так как $Q_2 = 0$ в этом случае, то нам нужно дойти до $MR_2 = 60 - 2Q_2 = 60$. Найдем этот момент:

$$MR_1 = 90 - 2Q_1 = 60$$
$$Q_1 = 15$$

Таким образом, первые пятнадцать единиц мы продадим первой группе и наш общий MR будет совпадать с MR первой группы:

$$MR = 90 - 2Q,\ Q < 15$$

Что же делать дальше? Пусть мы произвели какое-то количество $Q > 15$. Посмотрим обе ситуации, которые могут произойти (данный прием является стандартным и довольно строгим, такой же пример можете посмотреть в разделе **Несколько заводов** в секции **Производство**).

Пусть $MR_1 > MR_2$. Тогда мы можем перебросить ΔQ со второй группы на первую, в итоге увеличив выручку. В результате, так как MR орицательно зависит от Q для каждой группы, MR_1 уменьшится, а MR_2 увеличиться: $\downarrow MR_1 > MR_2 \uparrow$. Таким образом, мы будем перекидывать наше количество до тех пор, пока оба MR не сравняются. Аналогично говорим и про ситуацию $MR_1 < MR_2$.

Найдем точку, в которой $MR_1 = MR_2$:

$$90 - 2Q_1 = 60 - 2Q_2$$
$$15 + Q_2 = Q_1$$

Заметьте, что в итоге для ситуации $Q > 15$ тогда будет верно, что $MR = MR_1 = MR_2$ в оптимуме, так как наша выручка с единицы товара будет равна выручке с единицы товара первой и второй группе (если мы можем продать яблоко одному человеку за 10 рублей и второму человеку за 10 рублей это значит, что мы можем продать яблоко за 10 рублей).

Таким образом, если мы найдем зависимость $Q_1(Q)$, то, подставив его в MR_1, мы сможем найти функцию $MR(Q)$, что нам, собственно, и нужно.

$$Q_2 = Q_1 - 15$$
$$Q_1 + Q_2 = Q$$
$$Q_1 + Q_1 - 15 = 2Q_1 - 15 = Q$$
$$Q_1 = \frac{Q + 15}{2}$$
$$MR = MR_1 = 90 - 2Q_1 = 90 - Q - 15 = 75 - Q$$

Мы нашли MR для участка $Q > 15$. Тогда наш общий MR выглядит следующим образом:

$$MR = \begin{cases} 90 - 2Q; & Q \leqslant 15 \\ 75 - Q & Q > 15 \end{cases}$$

Кстати, второй участок функции MR можно было найти так называемым «горизонтальным сложением» функций, когда мы складываем функции по их аргументам. Сложим горизонтально эти две функции: $MR = 90 - 2Q_1$ и $MR = 60 - 2Q_2$:

$$Q_1 = 45 - \frac{MR}{2}$$
$$Q_2 = 30 - \frac{MR}{2}$$
$$Q = Q_1 + Q_2 = 75 - MR$$

$$MR = 75 - Q$$

Нарисуем теперь функции MR и MC, чтобы найти оптимум:

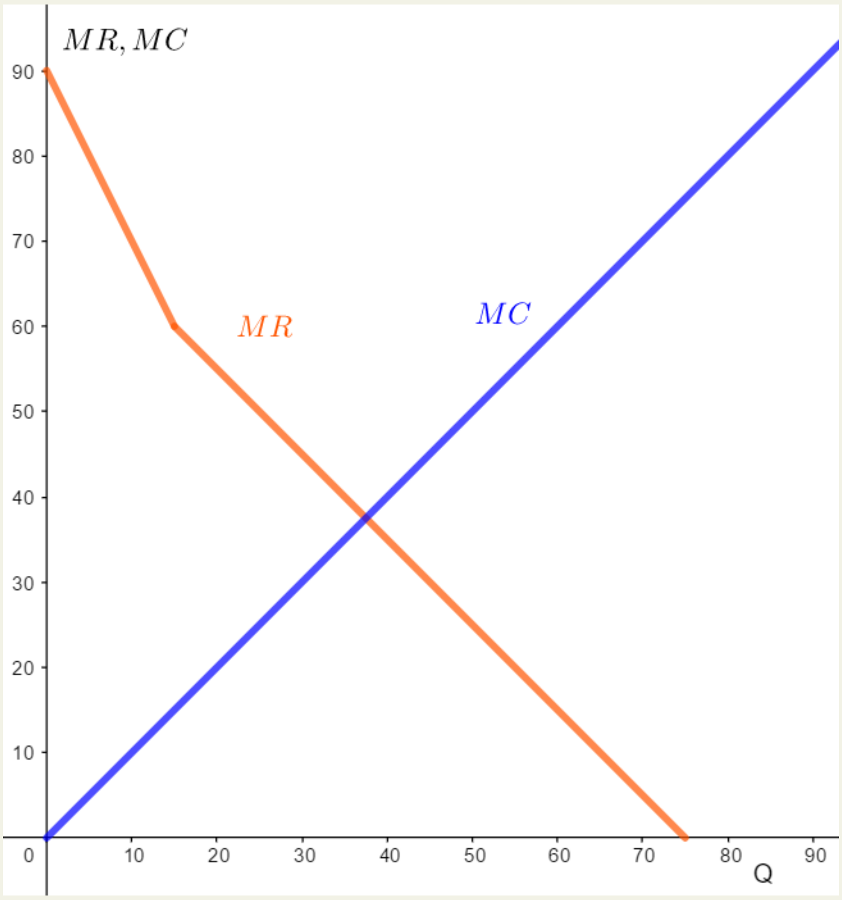


Рис. 62: Итоговые MR и MC

Теперь заштрихуем площади прибылей и убытков:

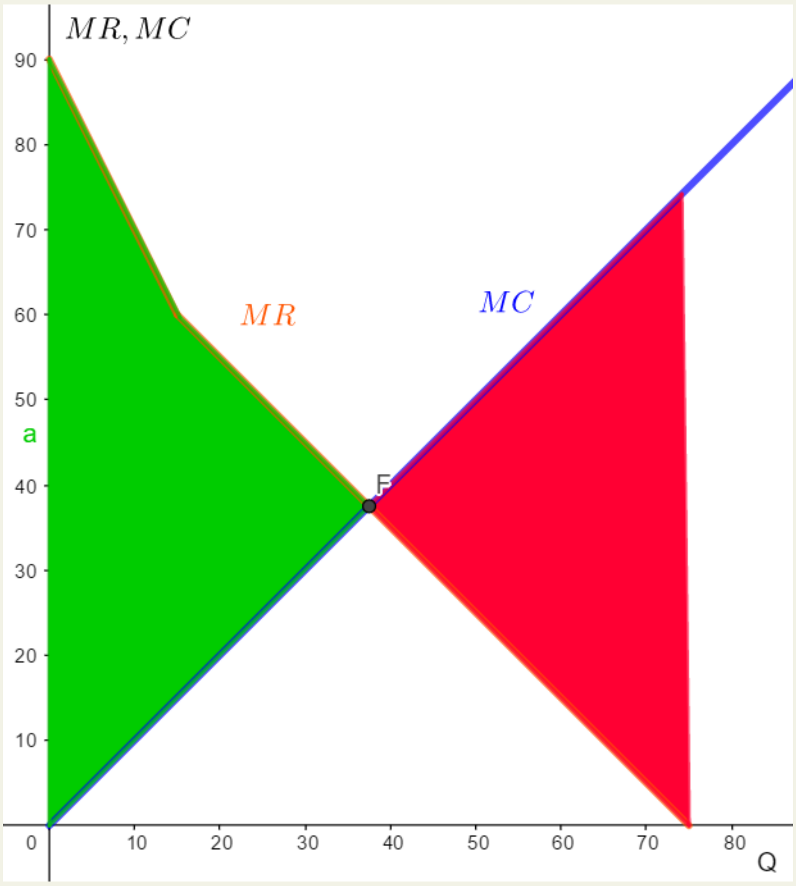


Рис. 63: Прибыли и убытки

Как мы можем видеть, оптимум - точка пересечения F, так как до нее фирма получает прибыль, а после - убыток. MC пересекает второй учаток MR. Найдем точку пересечения:

$$75 - Q = Q$$

$$Q = \frac{75}{2}$$

Теперь найдем все необходимые нам количества и цены, которые монополист выберет для каждой группы:

$$Q_1 = \frac{Q + 15}{2} = \frac{105}{4}$$

$$Q_2 = Q_1 - 15 = \frac{45}{4}$$

$$P_1 = 90 - Q_1 = 90 - \frac{105}{4} = \frac{255}{4}$$

$$P_2 = 60 - Q_2 = 60 - \frac{45}{4} = \frac{195}{4}$$

Дискриминация 2 рода

Данный вид дискриминации заслуженно считается самым сложным для решения родом дискриминации, а также одной из самых сложных тем в олимпиадной экономике.

Суть дискриминации второго рода в том, что различные количества товара продаются по разным ценам за единицу товара. У данной дискриминации есть множество эквивалентных интерпретаций. Например, три товара по цене двух в магазине (можно купить 1 шампунь за 30 рублей или 3 шампуня за 60 (то есть по цене 20 за штуку)). Предоставление такого выбора в экономике называется *скрининг*. Также, к дискриминации второго рода относится двухчастный тариф: например, плата за вход в парк аттракционов, а затем отдельная оплата каждого аттракциона (при плате 1000 за вход и по 1000 за аттракцион мы заплатим в итоге 2000 за один аттракцион, но 3000 за 2 аттракциона (по 1500 за каждый)).

Рассмотрим оба варианта дискриминации второго рода на примере задач. В обоих случаях у нас будут два потребителя с следующими функциями полезности:

$$U_1 = 40x_1 - x_1^2 - C_1$$
$$U_2 = 32x_2 - x_2^2 - C_2$$

Здесь x_i – количество товара, купленное i-тым потребителем, а C_i – суммарные затраты i-того потребителя на покупку этого товара. Издержки производства товара для нашего монополиста будут задаваться как $TC_x = 4x$.

Скрининг

Рассмотрим задачу, в которой монополист предлагает нашим потребителям на выбор два комплекта товаров: (x_1,P_1) и (x_2,P_2). То есть, можно купить количество x_1 за P_1 д.е. (за весь объем товара), а можно x_2 за P_2. Также условием задачи является то, что каждый потребитель может купить максимум один комплект, а может вообще ничего не покупать и получить полезность, равную нулю. В таком случае, C_i равна либо P_1, либо P_2, в зависимости от того, какой комплект купит потребитель.

При данном условии выставлять больше двух комплектов не имеет смысла: можно будет просто убрать тот, который никто не покупает. Здесь задача делится на два случая: мы можем выставить комплекты таким образом, чтобы разные потребители купили разные комплекты (ситуация, в которой они покупают одинаковый комплект, явялется частным случаем этой), или когда мы стараемся продать товар только одному потребителю (это имеет смысл, когда второй потребитель не очень платежеспособный и нам нужно занижать цену для первого, чтобы он не купил комплект, выставленный для второго).

Разберем ситуации по очереди. Сначала будем продавать коплекты обоим потребителям. Первый комплект – первому, второй комплект – второму.

В таком случае для нас должны выполняться 4 условия: каждый из потребителей должен купить комплект (то есть при покупке его полезность должна не оказаться отрицательной), и причем он должен купить именно свой комплект который мы ему приготовили (иначе задача становится несостоятельной и нужно ее решать уже опираясь на то, что они будут покупать одинаковые комплекты, что нам делать не нужно).

Итак, полезность каждого потребителя от покупки своего комплекта больше, чем от покупки другого, а также больше нуля:

$$\begin{cases} (1)\ 40x_1 - x_1^2 - P_1 \geqslant 40x_2 - x_2^2 - P_2 \\ (2)\ 40x_1 - x_1^2 - P_1 \geqslant 0 \\ (3)\ 32x_2 - x_2^2 - P_2 \geqslant 32x_1 - x_1^2 - P_1 \\ (4)\ 32x_2 - x_2^2 - P_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Наша задача получить максимальную прибыль при этих ограничениях, выбрав оптимальные значения P_1, P_2, x_1 и x_2. Для решения этой задачи мы не будем сразу выписывать прибыль и максимизировать ее в лоб. Сначала поработаем с вышеописанной системой. Делать это можно разными способами, я опишу самый быстрый.

Заметим, что из (1) и (4) неравенств следует (2):

$$40x_1 - x_1^2 - P_1 \geqslant 40x_2 - x_2^2 - P_2 \geqslant 32x_2 - x_2^2 - P_2 \geqslant 0$$

Так что спокойно убираем (2) из системы:

$$\begin{cases} (1)\ 40x_1 - x_1^2 - P_1 \geqslant 40x_2 - x_2^2 - P_2 \\ (3)\ 32x_2 - x_2^2 - P_2 \geqslant 32x_1 - x_1^2 - P_1 \\ (4)\ 32x_2 - x_2^2 - P_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Теперь начнем максимизировать нашу прибыль. Запишем ее в общем виде:

$$\Pi = P_1 + P_2 - 4(x_1 + x_2)$$

Заметим, что при выбраных x_1 и x_2 увеличение цены строго увеличит нашу прибыль, если оно не повлияет на нашу систему ограничений. Тогда, если мы выбрали какие-то P_1, P_2, x_1 и x_2, то мы можем увеличивать P_1, получая дополнительную прибыль. Заметим, что на (3) уравнение увеличение P_1 не влияет, тогда как две части (1) уравнения сходятся к равенству. Таким образом, мы можем увеличивать P_1, пока не достигнем равенства в (1):

$$\begin{cases} (1)\ 40x_1 - x_1^2 - P_1 = 40x_2 - x_2^2 - P_2 \\ (3)\ 32x_2 - x_2^2 - P_2 \geqslant 32x_1 - x_1^2 - P_1 \\ (4)\ 32x_2 - x_2^2 - P_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

По той же самой логике будем дальше увеличивать на одну и ту же величину и P_1 и P_2. Такое изменение не будет влиять на (1) и (3), то будет приводить (4) к равенству. Получаем:

$$\begin{cases} (1)\ 40x_1 - x_1^2 - P_1 = 40x_2 - x_2^2 - P_2 \\ (3)\ 32x_2 - x_2^2 - P_2 \geqslant 32x_1 - x_1^2 - P_1 \\ (4)\ 32x_2 - x_2^2 - P_2 = 0 \end{cases}$$

Осталось что-то сделать с (3) неравенством. Заметим, что оно следует из комбинации (1) равенства и неравенства $x_1 \geqslant x_2$, так как если вычесть из левой части (1) $8x_1$, а из правой части – $8x_2$, то мы как раз получим (3) неравенство, так как $8x_1 \geqslant 8x_2$. Сделав замену неравенства, получаем, что в оптимуме прибыли:

$$\begin{cases} (1)\ 40x_1 - x_1^2 - P_1 = 40x_2 - x_2^2 - P_2 \\ (3)\ x_1 \geqslant x_2 \\ (4)\ 32x_2 - x_2^2 - P_2 = 0 \end{cases}$$

Из такой системы очень удобно оптимизировать прибыль, а единственное (3) неравенство, скорее всего, будет выполняться в оптимуме, ведь полезность первого больше, чем полезность второго, а значит, он готов будет купить больше товара. (Если это не так, то задача становится уже гораздо сложнее и рассматривать эту ситуацию мы уже не будем).

Так как компоненты нашей прибыли связаны через равенства, можем выразить P_1 и P_2 из системы (это гораздо удобнее, чем выражать x_1 и x_2) и подставить их в прибыль:

$$P_2 = 32x_2 - x_2^2$$

$$P_1 = 40x_1 - x_1^2 - 40x_2 + x_2^2 + P_2 = 40x_1 - x_1^2 - 40x_2 + x_2^2 + 32x_2 - x_2^2 = 40x_1 - x_1^2 - 8x_2$$

$$\Pi = P_1 + P_2 - 4(x_1 + x_2) = 32x_2 - x_2^2 + 40x_1 - x_1^2 - 8x_2 - 4x_1 - 4x_2 = 20x_2 - x_2^2 + 36x_1 - x_1^2 \xrightarrow{x_1,\ x_2} max$$

У нас получились две независимые параболы из-за того, что предельные издержки производства постоянны. В случае, если это не так, прибыль нужно максимизировать по двум переменным. Мы же можем отдельно промаксимизировать две параболы и найти все параметры комплектов, которые принесут нам максимальную прибыль.

Не забываем, что это – параболы ветвями вниз и максимумы у них в вершинах:

$$x_1^* = 18$$

$$x_2^* = 10$$

$$P_1 = 40x_1 - x_1^2 - 8x_2 = 316$$

$$P_2 = 32x_2 - x_2^2 = 220$$

$$\Pi = 20x_2 - x_2^2 + 36x_1 - x_1^2 = 424$$

Что и требовалось ожидать, ограничение $x_1 \geqslant x_2$ выполняется.

Как вы можете заметить исходя из уравнения для P_1, чем больше мы делаем второй комплект, тем сильнее должны снижать цену для первого потребителя, чтобы он не выбрал этот самый второй комплект. Как раз исходя из этого возникает второй случай: теперь мы не будем рассматривать второго покупателя, а попробуем продать комплект только первому (так как он готов платить больше из-за более высокой полезности).

В таком случае, у нас остается всего одно неравенство: первый потребитель просто должен купить комплект, который мы ему предложим, и получить неотрицательную полезность:

$$40x_1 - x_1^2 - P_1 \geqslant 0$$

С уже вышеописанной логикой увеличим P_1, пока неравенство не сойдется в равенство, и проделаем уже знакомую нам оптимизацию, которая станет заметно проще:

$$P_1 = 40x_1 - x_1^2$$

$$\Pi = P_1 - 4x_1 = 36x_1 - x_1^2 \xrightarrow{x_1} max$$

$$x_1^* = 18$$

$$P_1 = 396$$

$$\Pi = 324$$

Как вы видите, цена для первого потребителя заметно выросла, но все же прибыль уменьшилась по сравнению с первым случаем, так как второй потребитель окупает эффект снижения цены для первого. В таком случае, нашим ответом будут значения переменных, полученных в первом случае.

Двухчастный тариф

Теперь предложим нашим двум потребителям немного другум модель ценообразования: двухчастный тариф. Он состоит из двух цен, которые потребителям необходимо будет оплатить: первая цена (назовем ее A) будет платиться за *возможность* покупки товара, а вторая (P) – за каждую единицу товара. В отличии от скрининга, количество товара, которое потребитель захочет купить, будет выбирать он сам.

В таком случае, затраты потребителя на покупку товара будут иметь следующий вид:

$$C_i = A + P \cdot x_i$$

Наша задача определить оптимальные значения A и P, которые максимизируют прибыль фирмы. Решение двухчастного тарифа похоже на решение скрининга: у нас опять возникают два случая, которые нам необходимо будет сравнить. Если мы хотим, чтобы товар покупало двое потребителей, то необходимо поставить меньший барьер на вход A. Если же нам достаточно одного потребителя, то мы его повысим. Итак, по порядку.

Сначала рассмотрим ситуацию, в которой мы хотим, чтобы товар покупали оба потребителя, то есть мы поставим такие A и P, что хоть что-то они купят. В таком случае, найдем, сколько товара купит каждый из них (заметьте, что так как я сказал, что оба потребителя будут покупать товар, нам не нужно проверять никакие ограничения):

$$U_1 = 40x_1 - x_1^2 - A - P \cdot x_1 \xrightarrow{x_1} max$$
$$x_1^* = \frac{40 - P}{2}$$
$$U_1 = 32x_2 - x_1^2 - A - P \cdot x_2 \xrightarrow{x_2} max$$
$$x_2^* = \frac{32 - P}{2}$$
$$x = x_1 + x_2 = 36 - P$$

Таким образом, мы нашли суммарный спрос на наш товар. Также, посмотрим на ограничения, которе накладывает на нас условие о том, что оба потребителя должны покупать товар:

$$U_1 = 40x_1 - x_1^2 - A - P \cdot x_1 \geqslant 0$$
$$U_2 = 32x_2 - x_2^2 - A - P \cdot x_2 \geqslant 0$$

Мы знаем, какие x_1 и x_2 выберут потребители, так что можем использовать это в неравенствах. Подставив, получаем:

$$U_1 = (\frac{40 - P}{2})^2 \geqslant A$$
$$U_2 = (\frac{32 - P}{2})^2 \geqslant A$$

Заметим, что второе неравенство строже первого. Оставляем только одно неравенство:

$$(\frac{32 - P}{2})^2 \geqslant A$$

Применим идею из скрининга: если мы уже выбрали значения A и P и неравенство оказалось верным, то мы можем увеличить A, что не изменит выбор потребителя, а значит строго увеличит нашу прибыль. В таком случае, мы можем увеличивать A, пока неравенство не станет равенством. То есть в оптимуме верно следующее соотношение между нашими ценами:

$$(\frac{32 - P}{2})^2 = A$$

Осталось записать нашу прибыль используя все полученные выше равенства, и промаксимизировать ее:

$$\Pi = P \cdot (x_1 + x_2) + 2A - 4x_1 - 4x_2 = (P - 4) \cdot (36 - P) + 2(\frac{32 - P}{2})^2 = 8P - \frac{P^2}{2} + 368 \xrightarrow{P} max$$

$$P^* = 8$$

$$A = 144$$

$$\Pi = 400$$

Однако, мы можем отказаться от продажи товаров двум потребителя, и сосредоточиться только на одном. В таком случае, у нас остается лишь одно ограничение:

$$U_1 = (\frac{40 - P}{2})^2 \geqslant A$$

Откуда мы можем назначить уже большее A, чем в предыдущем случае:

$$A = (\frac{40 - P}{2})^2$$

Учтем это в прибыли (заметьте, что A нам теперь платят всего один раз):

$$\Pi = (P-4)x_1 + A = (P-4)\frac{40-P}{2} + (\frac{40-P}{2})^2 = 2P - \frac{P^2}{4} + 320 \xrightarrow{P} max$$

$$P^* = 4$$

$$A = 324$$

$$\Pi = 324$$

Оказывается, с первого потребителя мы получаем значительно больше прибыли, чем раньше, но суммарно нам выгодно, чтобы товар покупали оба потребителя и мы выберем значения $A = 144$ и $P = 8$, как в первом случае.

Заметьте, что при оптимизации для одного потребителя и двухчастный тариф, и скрининг приносят одинаковую прибыль (324), так как мы просто забираем весь максимальный излишек потребителя. В случае же с двумя потребителями скринг оказался выгоднее двухчастного тарифа, так как во втором случае мы дали потребителям выбирать количество товара, а при скрининге выбирали за них.

Дискриминация 1 рода

Дискриминация первого рода считается самой выгодной для фирмы и заключается в том, что фирма назначает **каждому покупателю отдельную цену**, или же, в более мягком случае, **может назначать разным покупателям разные цены**, не разделяя их на группы.

Абсолютная дискриминация

Чтобы вы поняли, что к чему, рассмотрим сначала задачу на абсолютную дискриминацию (когда каждому потребителю назначается своя цена). Пусть спрос и издержки монополиста заданы следующими функциями:

$$Q_d = 100 - P$$

$$TC = 20Q$$

Для абсолютной дискриминации есть один интересный факт: так как для продажи дополнительной единицы продукции теперь **не** нужно снижать цену на предыдущие, то функция спроса становится тождественна функции MR (так как за каждый товар мы как раз получаем цену, которую конкретный потребитель готов за нее заплатить). Таким образом, довольно легко найти оптимум, учитывая, что $MC = TC' = 20$:

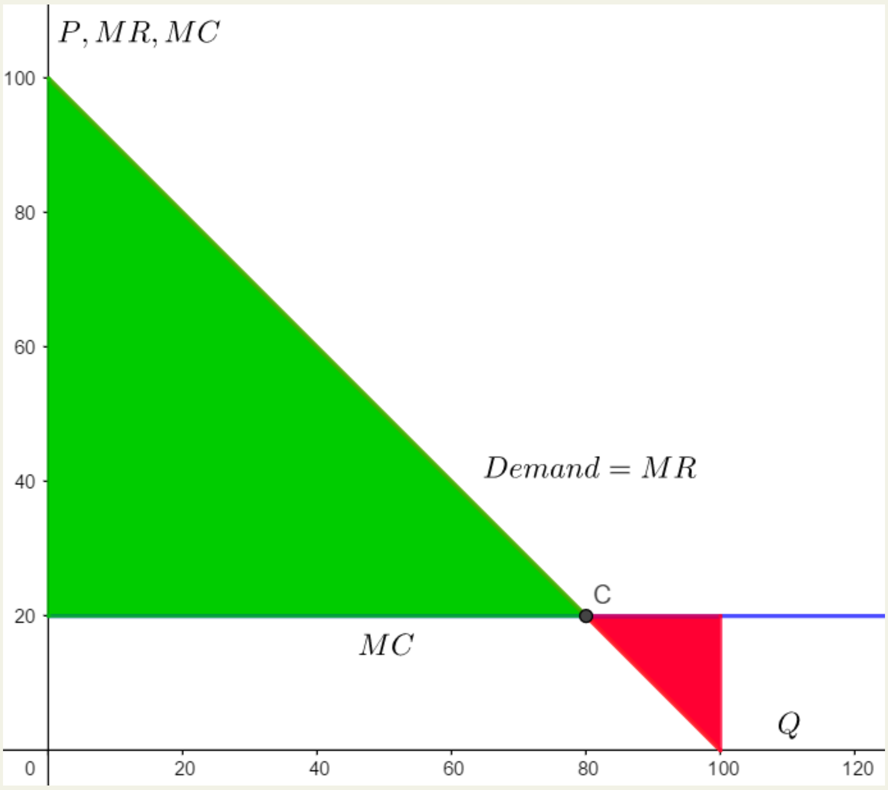


Рис. 64: Оптимум - точка C

Таким образом, оптимум находится в точке C. Найдем ее:

$$100 - Q = 20$$

$$Q = 80$$

Соответственно, наша прибыль будет равна зеленой площади, то есть 3200 д.е.

Неполная дискриминация

Также бывает ситуация, при которой монополист по какой-либо причине может назначать разные цены одной и той же группе потребителей, но не может полностью их дискриминировать. Самый частый пример: дискриминация по времени покупки.

Допустим, годовой спрос на товар имеет вид $Q_d = 120 - P$, а монополист не несет издержек на производство товара. Здесь мы довольно просто можем посчитать, что в таком случае монополист установит цену 60, произведет 60 единиц товара и получит прибыль, равную 3600 (мы научились считать это ранее). Однако, в данной задаче у монополиста есть возможность провести рекламную кампанию, которая ускорит продажи в 2 раза. То есть все, кто хотел купить данный товар по определенной цене, купят его за полгода. Такая рекламная кампания даст монополисту возможность снизить цену, и за следующие полгода продать товар тем, кто не хотел покупать его по прежней цене. Вопросом является то, сколько он готов заплатить за данную рекламную акцию.

Давайте посмотрим на то, как это будет выглядеть на графике:

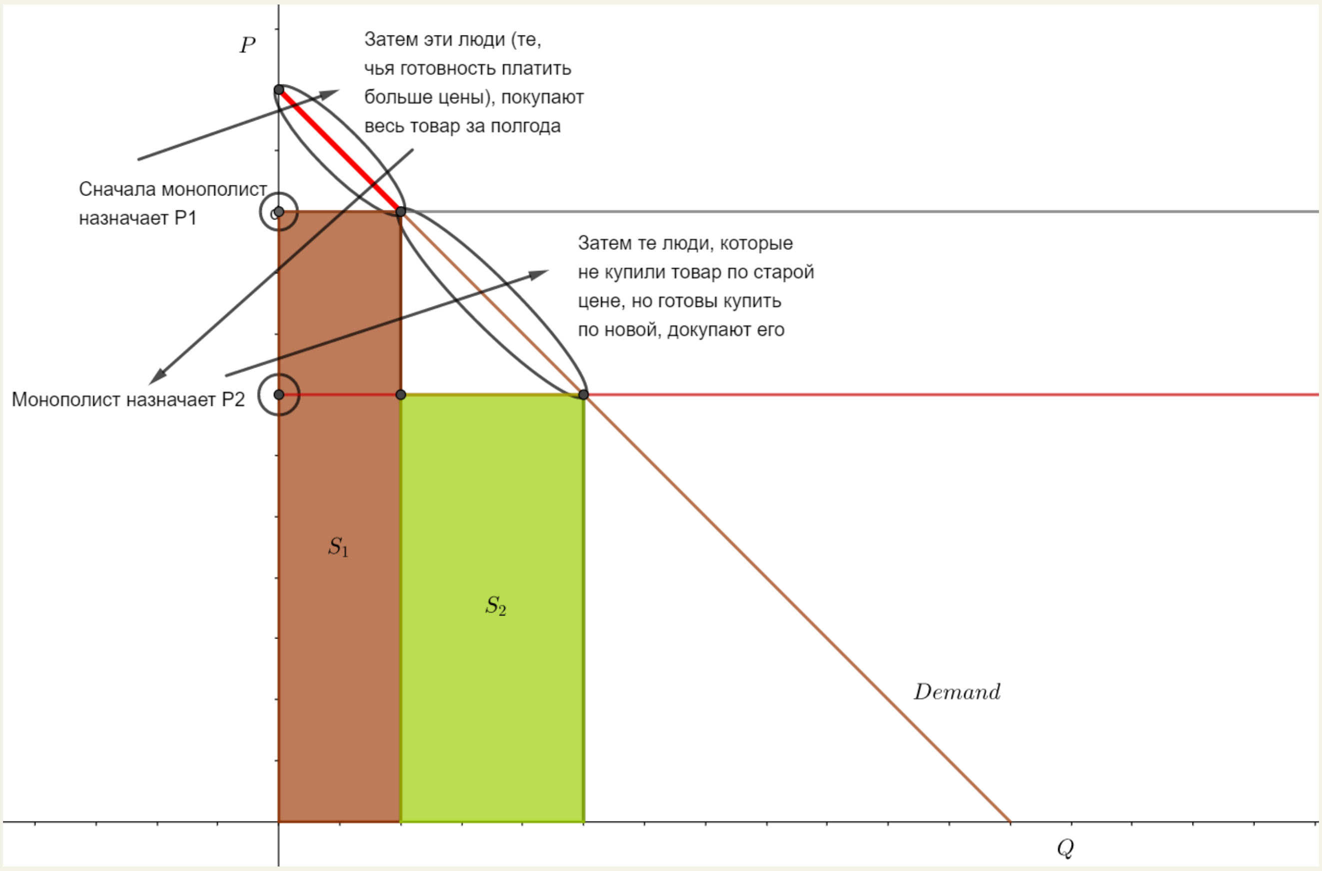


Рис. 65: Порядок действий при двухпериодной дискриминации

Так как издержки монополиста нулевые, то после первого периода (после первых шести месяцев) он получит прибыль, равную S_1, а после второго периода - S_2. Итого, он получит всю закрашенную область $(S_1 + S_2)$.

Задачей монополиста в таком случае, естественно, является максимизация данной прибыли. Для решения нам нужно выписать ее в явном виде.

$$\Pi = P_1Q_1 + P_2Q_2$$

Здесь P_1 и P_2 - цены в первом и втором периоде, а Q_1 и Q_2, соответственно, количества, проданные в этих периодах. Естественно, эти величины связаны между собой, и нам нужно найти эту связь.

Во-первых, мы знаем, что $Q_1 = 120 - P_1$. Как же найти связь P_2 и Q_2? Для этого нам нужно уравнение **остаточного спроса**. **Остаточный спрос** - это спрос на товар после того, как часть потребителей его уже приобрела.

В нашем случае остаточным спросом будет являться следующая часть основного спроса:

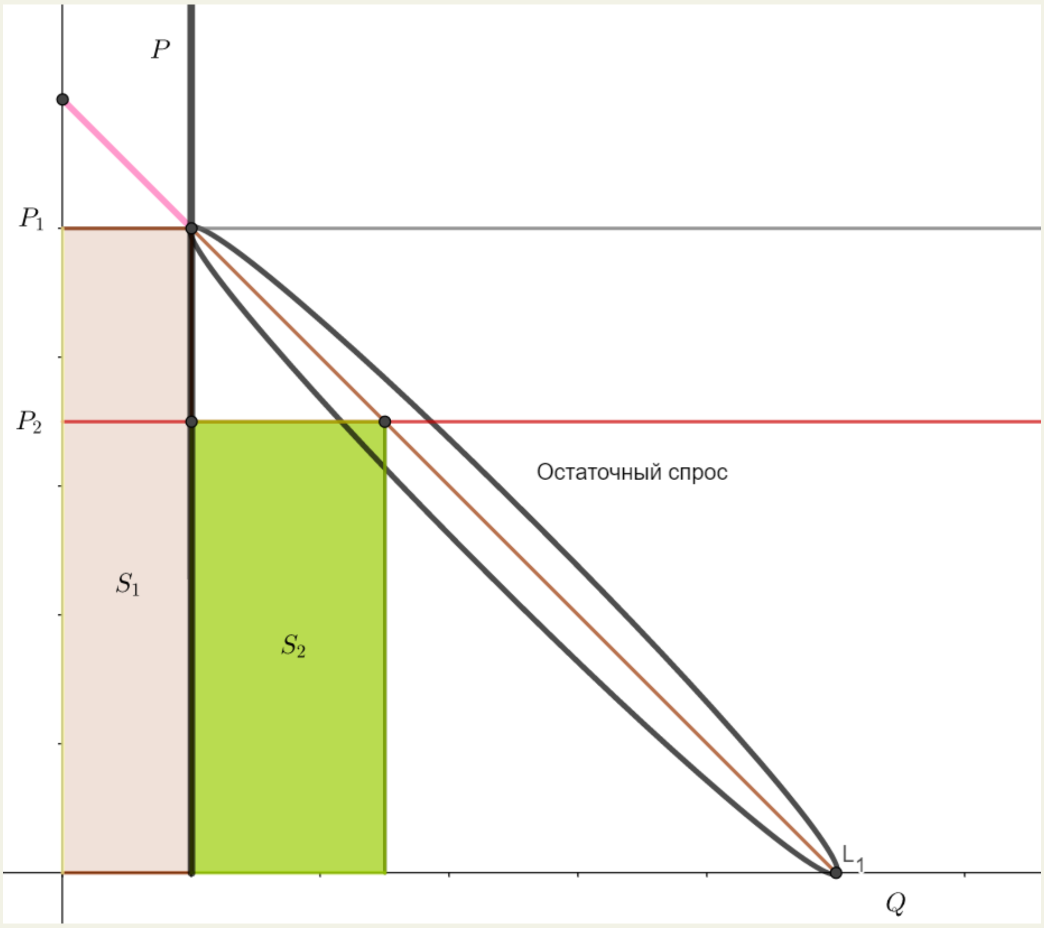


Рис. 66: Остаточный спрос

Чтобы найти функцию остаточного спроса, нам нужно сместить ось ординат до начала остаточного спроса. Таким образом, мы получим новую функцию оставшегося нам после первого периода спроса и сможем с ней работать. Теперь можно довольно просто найти ее функцию: прямая выходит из точки P_1 по оси ординат и имеет наклон -1, следовательно, выражается функцией $Q = P_1 - P$. В нашем случае будет верно, что $Q_2 = P_1 - P_2$.

Подставим обе найденные зависиомсти Q_1 и Q_2 обратно в прибыль:

$$Q_1 = 120 - P_1$$

$$Q_2 = P_1 - P_2$$

$$\Pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (120 - P_1)P_1 + (P_1 - P_2)P_2 = 120P_1 - P_1^2 + P_1P_2 - P_2^2$$

Далее мы отдельно выбираем P_1 и P_2. Таким образом, нам остается максимизировать нашу прибыль по двум переменным, учитывая ограничение $P_2 \leqslant P_1$. Сначала будем максимизировать по P_2. Относительно этой переменной функция является параболой ветвями вниз, следовательно, оптимум находится в вершине:

$$P_2^* = \frac{-b}{2a} = \frac{P_1}{2}$$

Вершина подходит под все ограничения: $0 \leqslant \frac{P_1}{2} \leqslant P_1$. Подставим найденный оптимум обратно в функцию:

$$\Pi = 120P_1 - P_1^2 + P_1P_2 - P_2^2 = 120P_1 - P_1^2 + \frac{P_1^2}{2} - \frac{P_1^2}{4} = 120P_1 - \frac{3P_1^2}{4}$$

Теперь промаксимизируем по P_1. Опять же, функция является параболой ветвями вниз с максимумом в вершине:

$$P_1^* = \frac{-b}{2a} = \frac{240}{3} = 80$$

$$P_2 = \frac{P_1}{2} = 40$$

Таким образом, мы нашли две оптимальные цены, которые установит монополист в каждом периоде. Теперь найдем нашу прибыль:

$$\Pi = 120P_1 - \frac{3P_1^2}{4} = 4800$$

Сравним полученную прибыль с той, которую монополист бы получал без рекламной акции: 3600. Таким образом, рекламная акция увеличила прибыль на 1200. Следовательно, монополист готов заплатить любую сумму $X \leqslant 1200$ за проведение данной акции.

В таких задачах обязательно обращайте внимание на порядок действий, который дан в задаче. Выше мы разобрали ситуацию, в которой монополист **заранее** знал о возможности проведения рекламной акции. Однако, в другой задаче может попасться ситуация, в которой монополист узнает о том, что может поработать на остаточном спросе только после того, как товар внезапно раскупят за полгода по назначенной им цене (то есть в самом начале он думал, что будет только 1 период). Такое условие в корне меняет ход решения. Будьте внимательны!

Олигополия

Олигополия - рыночная структура, при которой на рынке присутствуют несколько крупных фирм, осознающих свою рыночную власть. Такие фирмы конкурируют друг с другом стремясь заработать максимальную прибыль. Есть множество вариантов взаимодействий между фирмами, и в данной секции мы рассмотрим большинство из них.

Во всех моделях предполагается, что фирмы знают о существовании и возможностях друг друга. Также каждая фирма по умолчанию знает функции издержек ее конкурентов.

Модель Курно

Модель названа в честь французского экономиста, предложившего данный вариант взаимодействия фирм на олигополистическом рынке. В данной модели все фирмы, присутствующие на рынке, одновременно выбирают объем своего выпуска, после чего цена устанавливается исходя из функции спроса и суммарного количества товара.

Например, если спрос на рынке задан как $Q_d = 10 - P$, и на нем есть всего две фирмы, которые произвели соответственно 2 и 3 единицы товара, то цена сложится на уровне $P = 10 - Q = 10 - (2 + 3) = 5$.

Сразу хочется сказать, что первые две модели - модель Курно и модель Штаккельберга - повсеместно используются в олимпиадной экономике. Все остальные модели используются довольно редко, но все же встречаются в задачах.

Понятие равновесия

Данная модель пользуется понятием **равновесия по Нэшу**.

Рановесие по Нэшу - концепция равновесия, предложенная **Джоном Нэшом**, за которую он получил Нобелевскую премию по экономике. Равновесием по Нэшу называется такой набор действий или стратегий, при котором ни одному действующему лицу не выгодно отклониться от выбранной стратегии при неизменных стратегиях других действующих лиц.
Далее я буду называть равновесие по Нэшу просто равновесием (как это принято делать в экономике).

Например, в игре камень-ножницы-бумага **не существует** равновесия: какой бы знак не выкинули два игрока, одному из них точно будет выгодно отклониться, чтобы победить.

Например, если Петя выкинул Камень, а Саша - бумагу, то Пете выгодно отклониться и выкинуть ножницы.

Собственно, задача

Как обычно, будем разбирать модель на примере конкретной задачи.

Нам дан рыночный спрос и две фирмы, которые характеризуются своими функциями издержек:

$$Q_d = 180 - P$$

$$TC_1 = 150Q_1$$

$$TC_2 = 100Q_2$$

Задачей будет найти равновесие на данном рынке, то есть то количество товара, которое произведет каждая фирма, причем никакой из них не будет выгодно в одиночку изменить свое количество.

У задач на равновесия есть два способа решения:

Первый состоит в том, чтобы найти (угадать, как-то обнаружить и т.д.) равновесие (равновесия) и доказать, что других равновесий не существует. Этот способ я рассматривать не буду, так как для него требуется очень сильная экономическая и математическая интуиция и он не является универсальным.

Второй способ заключается в нахождении **линий реакции** и их пересечений. **Линией реакции** называется функция нашей оптимальной стратегии в зависимости от стратегий других игроков. В нашем случае, линией реакции, например, первой фирмы будет являться зависимость ее произведенного количества от произведенного количества другой фирмы, то есть $Q_1 = f(Q_2)$. Соответственно, у второй фирмы тоже будет своя линия реакции.

Выводить линии реакции достаточно просто: как и в любой рыночной структуре, нам нужно максимизировать прибыль любым удобным нам способом. Здесь я буду делать это в лоб.

Итак, сначала посмотрим на максимизацию прибыли первой фирмы. Так как нам нужно найти линию реакции, то мы будет искать оптимальное Q_1 при каждом фиксированном Q_2 (по сути, это оптимизация прибыли с параметром). Выпишем прибыль первой фирмы (помним, что она знает о существовании второй и реагирует на ее количество), и промаксимизируем ее. Также, помним о том, что в олигополии фирмы осознают свою рыночную власть, то есть дейтвуют исходя из функции спроса:

$$Q = 180 - P$$

$$P = 180 - Q$$

$$\Pi_1 = PQ_1 - TC_1 = (180 - Q)Q_1 - TC_1 = (180 - (Q_1 + Q_2))Q_1 - 150Q_1 = 30Q_1 - Q_2Q_1 - Q_1^2 \xrightarrow{Q_1} max$$

Первая фирма выбирает Q_1 при фиксированном Q_2. По Q_1 данная функция является параболой ветвями вниз с максимумом в вершине:

$$Q_1^* = \frac{30 - Q_2}{2}$$

Не забываем проверить ограничение $Q_1 \geqslant 0$. Оно выполняется только при $Q_2 \leqslant 30$. Иначе, вершина отрицательна и первая фирма произведет $Q_1 = 0$. Таким образом, получаем следующую зависимость Q_1 от Q_2:

$$Q_1 = \begin{cases} \frac{30-Q_2}{2} & Q_2 \leqslant 30 \\ 0 & Q_2 > 30 \end{cases}$$

Это и есть линия реакции первой фирмы, то есть оптимальный выпуск при любой фиксированном выпуске ее конкурента.

Аналогично, находим линию реакции второй фирмы:

$$Q_2 = \begin{cases} \frac{80-Q_1}{2} & Q_1 \leqslant 80 \\ 0 & Q_1 > 80 \end{cases}$$

А теперь нам нужно найти те Q_1 и Q_2, для которых выполняются обе линии реакции, то есть их пересечение. Другими словами, нам нужно найти решение системы

$$\begin{cases} Q_2 = \begin{cases} \frac{80-Q_1}{2} & Q_1 \leqslant 80 \\ 0 & Q_1 > 80 \end{cases} \\ Q_1 = \begin{cases} \frac{30-Q_2}{2} & Q_2 \leqslant 30 \\ 0 & Q_2 > 30 \end{cases} \end{cases}$$

Выглядит довольно устрашающе (особенно если будет больше участков), так что настоятельно советую пересекать линии реакции с помощью графика. Действительно, если вы нарисуете обе линии реакции в координатах Q_1 и Q_2, то все станет довольно просто:

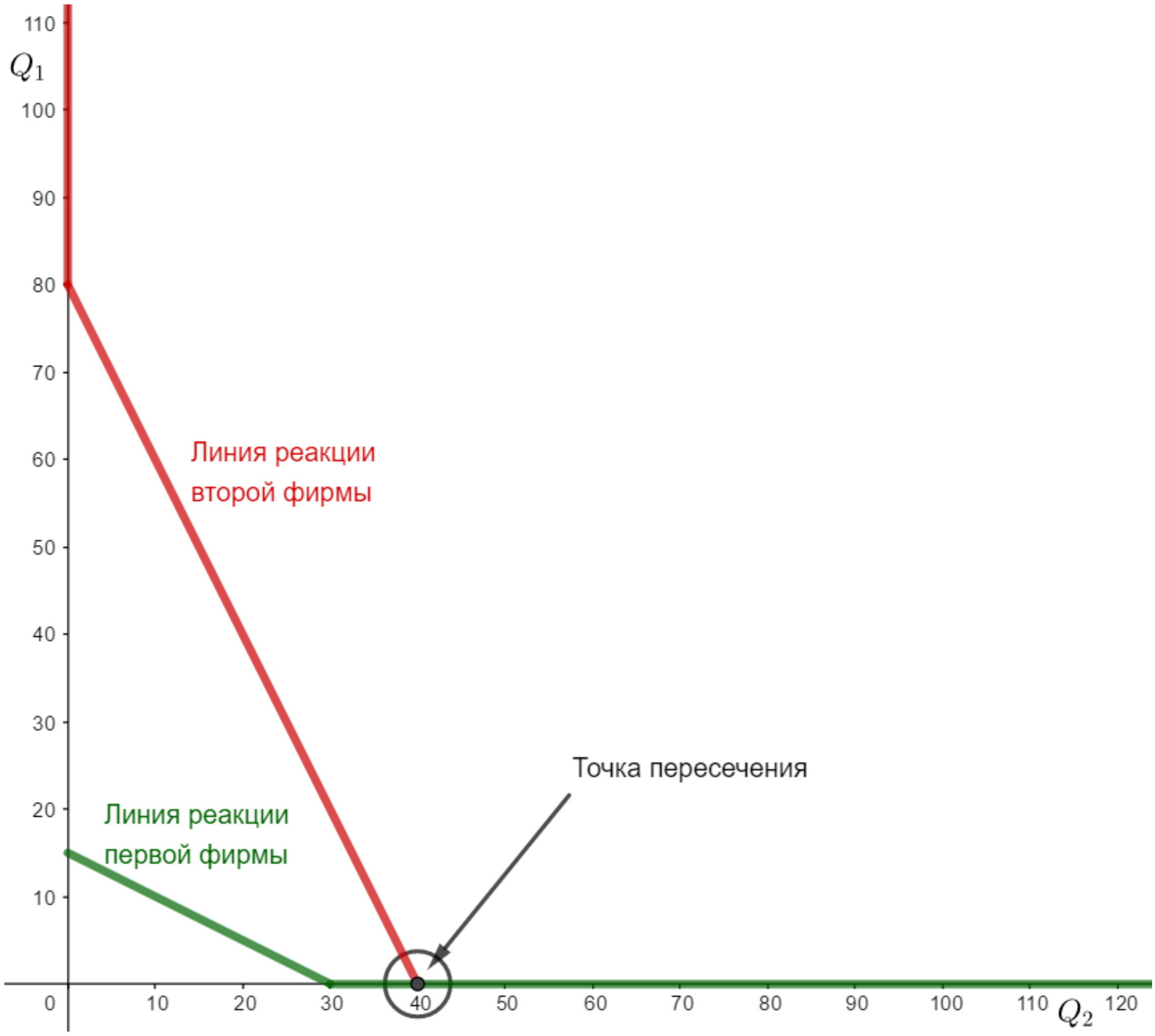


Рис. 67: Линии реакции в модели Курно

Сразу же видим, что пересечение одно и находится оно при $Q_1 = 0$ И $Q_2 = 40$. Таким образом решаются все задачи в модели Курно.

Модель Штаккельберга

Модель также названа в честь своего основателя - Генриха фон Штаккельберга. Отличие его модели от модели Курно состоит в том, что фирмы выбирают свои выпуски не одновременно, а по очереди. Рассмотрим алгоритм решения таких задач на конкретном примере.

Пусть у нас есть следующие исходные данные о спросе и издержках двух фирм:

$$Q_d = 30 - P$$

$$TC_1 = 15Q_1$$

$$TC_2 = 10Q_2$$

Однако теперь сначала первая фирма выбирает свой уровень выпуска, а затем вторая фирма, зная выпуск первой, принимает свое решение об объеме производства.

Чем же отличается решение от предыдущего? Для этого давайте рассмотрим прибыль первой фирмы. Она будет выглядеть точно так же, как и раньше:

$$\Pi_1 = PQ_1 - TC_1 = (30 - Q)Q_1 - TC_1 = (30 - (Q_1 + Q_2))Q_1 - 15Q_1 = 15Q_1 - Q_2Q_1 - Q_1^2 \xrightarrow{Q_1} max$$

Однако, **теперь выпуск второй фирмы не является константой**. Это происходит из-за того, что первая фирма понимает, что **выпуск второй фирмы будет зависеть от ее выпуска**, и, таким образом, выпуск второй фирмы является переменной, зависящей от Q_1. Пока мы не поймем зависимость Q_2 от Q_1, мы не можем максимизировать прибыль первой фирмы.

Зато мы можем максимизировать прибыль второй фирмы! Ведь **для второй фирмы выпуск первой фирмы будет являться константой**, так как она будет наблюдать выпуск первой фирмы, когда будет принимать решение об объеме производства. Таким образом, мы можем найти линию реакции второй фирмы при Q_1 в качестве константы:

$$\Pi_2 = PQ_2 - TC_2 = (30 - Q_1 - Q_2)Q_2 - 10Q_2 = 20Q_2 - Q_1Q_2 - Q_2^2 \xrightarrow{Q_2} max$$

$$Q_2^* = \frac{20 - Q_1}{2}$$

Проверяем на ограничение $Q_2 \geqslant 0$ и получаем полную линию реакции второй фирмы:

$$Q_2 = \begin{cases} \frac{20-Q_1}{2} & Q_1 \leqslant 20 \\ 0 & Q_1 > 20 \end{cases}$$

Теперь мы (вместе с первой фирмой) знаем зависимость Q_2 от Q_1 и можем максимизировать прибыль первой фирмы. Для этого необходимо подставить найденную зависимость в функцию прибыли:

$$\Pi_1 = 15Q_1 - Q_2Q_1 - Q_1^2 = \begin{cases} 15Q_1 - \frac{20-Q_1}{2}Q_1 - Q_1^2 & Q_1 \leqslant 20 \\ 15Q_1 - Q_1^2 & Q_1 > 20 \end{cases} = \begin{cases} 5Q_1 - \frac{Q_1^2}{2} & Q_1 \leqslant 20 \\ 15Q_1 - Q_1^2 & Q_1 > 20 \end{cases} \xrightarrow{Q_1} max$$

Вспоминаем, как максимизировать кусочную функцию:

Сначала максимизируем первый участок (парабола ветвями вниз), и находим оптимум $Q_1^* = 5$, затем второй, и находим $Q_1^* = \frac{15}{2}$, что не подходит под ограничение участка, следовательно, там оптимумом является $Q_1 = 20$ (ближайшая точка). Теперь сравниваем значение функции в точках $Q_1 = 5$ и $Q_1 = 20$ и понимаем, что в точке $Q_1 = 5$ значение больше. Таким образом, Q_1 является глобальным максимумом.

Теперь можно найти и оптимальное Q_2: $Q_2 = \frac{20-Q_1}{2} = \frac{15}{2}$. Мы решили задачу в модели Штакельберга.

Последовательное принятие решений также рассматривается не только в плане модели Штакельберга в олигополии, но и во многих других темах. Алгоритм решения всех таких задач одинаков: мы максимизируем целевую фукнцию последнего принимающего решение агента, затем предпоследнего и так далее (если их больше, чем два).

Модель Бертрана

Теперь мы с вами переходим к менее популярным, но все же важным моделям. Модель Бертрана была разработана Жозефом Бертраном. Она качественно отличается от предыдущих рассмотренных моделей: здесь фирмы будут выбирать не количества товара, а цены, которые они установят. Выбирать цены в модели Бертрана они будут одновременно. Таким образом, модель Бертрана также оперирует понятием **равновесия**.

Модель Бертрана в основном используется для анализа поведения фирм с **постоянными предельными издержками**, так как любой другой вид издержек значительно усложняет решение. Также есть множество других вариаций данной модели. Мы рассмотрим нахождение равновесия в одной из них, где фирмы будут иметь постоянные, но не симметричные предельные издержки.

Суть соревнования по цене состоит в том, что фирма, назначившая цену меньше своего конкурента, получает себе весь спрос, а вторая фирма не получает ничего. Мы также будем считать, что в случае, когда две фирмы назначат одинаковые цены, спрос будет делиться ровно пополам (то есть каждая фирма будет иметь право удовлетворить ровно половину от величины спроса при данной цене).

Итак, нам даны спрос и издержки двух фирм:

$$Q_d = 10 - P$$
$$TC_1 = 2Q_1$$
$$TC_2 = 8Q_2$$

Так как мы ищем равновесия, делать мы это будем с помощью линий реакции. Найдем линию реакции первой фирмы. Пусть вторая фирма назначили какую-то цену P_2. Мы примем ее за константу (параметр), и будем думать, какую P_1 нам нужно назначить, чтобы получить максимальную прибыль.

Для начала найдем, какую вообще максимальную прибыль мы можем получить, если все складывается идеально (то есть когда вторая фирма ничего не получает, и мы, являясь монополистом, назначаем монопольную цену). Для этого промаксимизируем нашу прибыль при отсутствии второй фирмы:

$$\Pi_1 = PQ - TC_1 = (10 - Q)Q - 2Q = 8Q - Q^2 \xrightarrow{Q} max$$

График - парабола ветвями вниз. Максимум в вершине:

$$Q^* = 4$$
$$P^* = 10 - 4 = 6$$

Итак, первая фирма получит максимальную прибыль из всех возможных, если установит цену $P = 6$ и если вторая фирма не перебьет эту цену. Таким образом, если $P_2 > 6$, то первая фирма установим $P_1 = 6$, заберет весь спрос у второй фирмы и получит максимальную монополистическую прибыль!

Осталось определить, какую цену первая фирма установит при $P_2 \leqslant 6$. Заметим, что если $P_2 < 2$, то у первой фирмы проблемы, ведь $MC_1 = 2$ (то есть первая фирма не сможет перебить цену второй, так как цена ниже ее предельных издержек). В таком случае первая фирма либо ставит цену выше P_2 и не получает ничего ($\Pi_1 = 0$), либо назначает цену такую же или ниже и уходит в убыток. Естественно, фирма выберет первый вариант. Таким образом, если $P_2 < 2$, то наш оптимальный ответ будет любой ценой $P_1 > P_2$.

Примерно та же ситуация происходит при $P_2 = 2$, только в этом случаем мы можем назначить цену $P_1 = 2$ и также получить нулевую прибыль, ведь за каждый товар мы будем получать ровно столько же, сколько тратить на его производство. Таким образом, при $P_2 = 2$ наш оптимальный ответ $P_1 \geqslant 2$.

Осталось найти оптимальный ответ первой фирмы при $2 < P_2 \leqslant 6$. Если она назначит $P_1 > P_2$, то получит прибыль 0. Если она назначит $P_1 = P_2$, то получит половину спроса, причем с каждой единицы будет получать какую-то прибыль, так как $P_2 > MC_1$. Это уже лучше, чем 0. Наконец, если она назначит цену, чуть меньшую, чем P_2, мы получим весь спрос.

Чуть меньше обычно значит, что мы назначаем цену, бесконечно близкую к P_2 снизу. Обычно эта цена обозначается как $P_2 - \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$. Таким образом, первая фирма получит аж в 2 раза большее количество товара, чем в случае одинаковых цен, причем за каждую единицу товара, по сути, получит ту же цену. Так как $P_2 > 2$, то и $P_2 - \varepsilon > 2$, значит, первая фирма получит положительную прибыль. Также, она не будем отклоняться от P_2 вниз больше, чем на ε, так как $P_2 \leqslant 6$, а оптимум прибыли находится при $P = 6$. Чем дальше первая фирма отклоняется от 6, тем меньше ее прибыль (так как прибыль является параболой ветвями вниз). Таким образом, при $2 < P_2 \leqslant 6$ наш оптимальный ответ $P_1 = P_2 - \varepsilon$.

Все, мы нашли оптимальную цену первой фирмы при любой цене ее оппонента. Объединим все вышесказанное в следующую систему:

$$P_1 = \begin{cases} 6 & P_2 > 6 \\ P_2 - \varepsilon & 2 < P_2 \leqslant 6 \\ [2; \infty) & P_2 = 2 \\ (P_2; \infty) & P_2 < 2 \end{cases}$$

Аналогично, мы можем можем найти линию реакции второй фирмы. Предельные издержки второй фирмы равны 8, а оптимальная цена - 9. Таким образом, линия реакции второй фирмы будет выглядеть следующим образом:

$$P_2 = \begin{cases} 9 & P_1 > 9 \\ P_1 - \varepsilon & 8 < P_1 \leqslant 9 \\ [8; \infty) & P_1 = 8 \\ (P_1; \infty) & P_1 < 8 \end{cases}$$

Теперь нам остается только пересечь данные линии реакции и найти равновесия! Аналитически это сделать без ошибок уже не представляется возможным, так что стоит изобразить данные системы на графике. Сначала изобразим линию реакции первой фирмы:

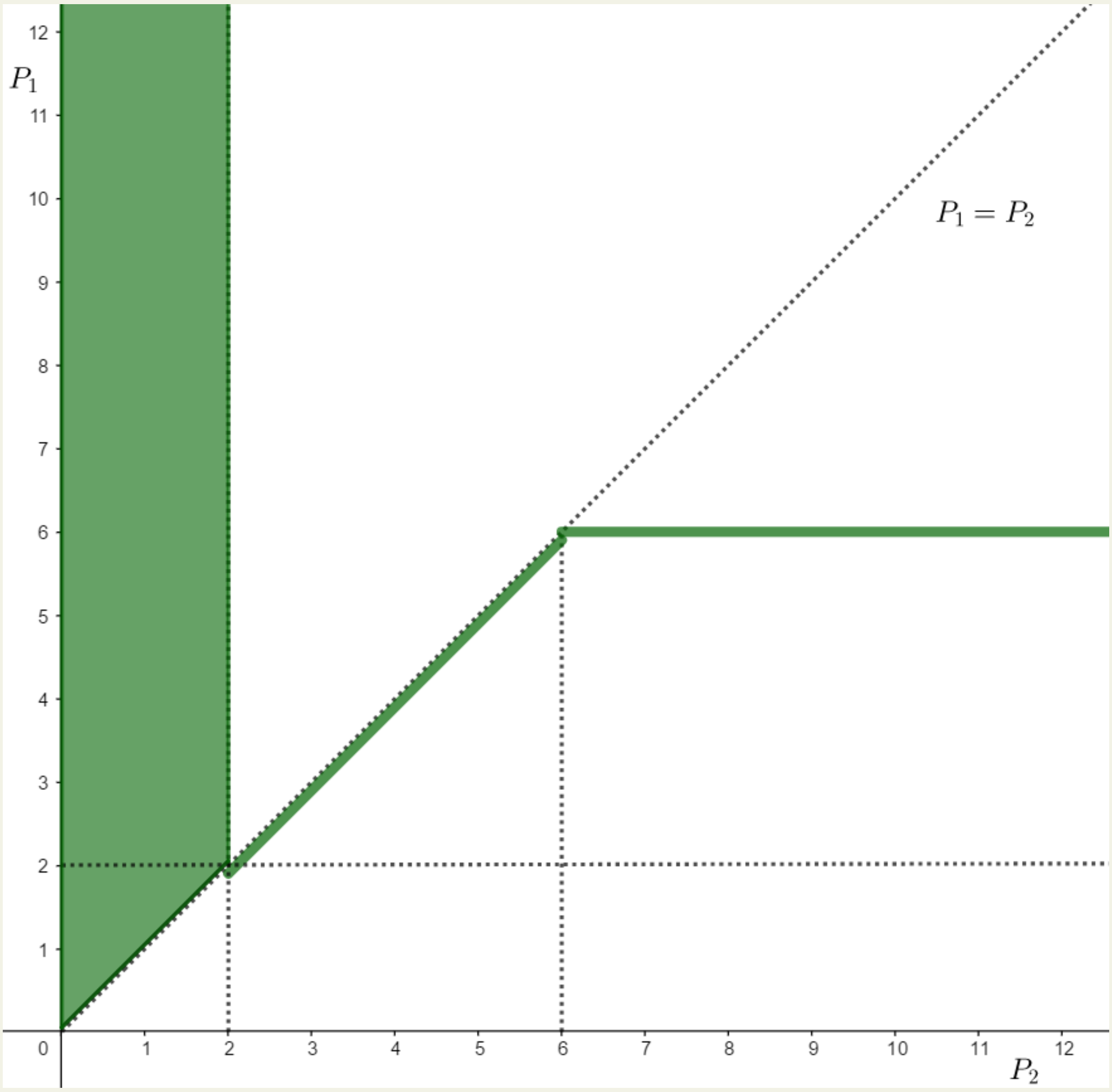


Рис. 68: Линия реакции одной фирмы в модели Бертрана

Как вы можете заметить, я специально сделал отступы линий от оси $P_1 = P_2$ побольше для наглядности (там должны быть бесконечно маленькие отступы). Теперь наложим на данный рисунок линию реакции второй фирмы и найдем их наложения друг на друга. Это и будут все равновесия:

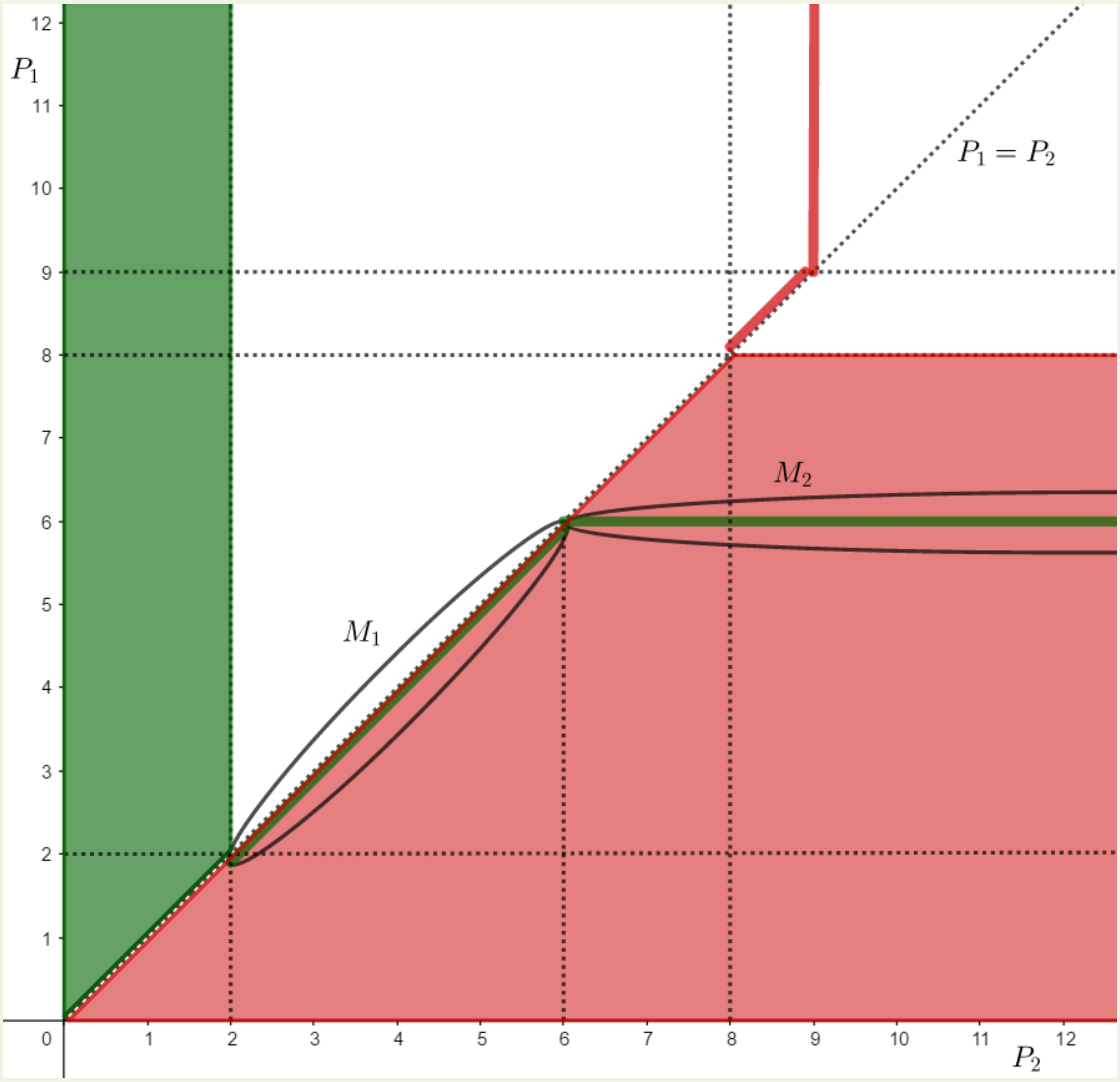


Рис. 69: Равновесия в модели Бертрана

Сразу же видны множества равновесий (это все точки, которые входят в обе линии реакции). Их можно разделить на две группы (на графике отмечены как M_1 и M_2).

M_1 - это множество равновесий, в которых вторая фирма назначает какую-то цену $2 < P_2 \leqslant 6$, а первая назначает цену $P_1 = P_2 - \varepsilon$, как бы перебивая вторую. Таким образом, первая фирма получает весь рынок, но не может увеличить прибыль: если она снизит цену, то удалится от оптимума $P_1 = 6$, а если увеличит - потеряет рынок. Вторая же фирма получает нулевую прибыль и не может ее увеличить, так как если она хочет продавать товар, то ей придется продавать его по цене $P_2 < 6$, что ниже ее предельных издержек.

M_2 - это множество равновесий, в которых первая фирма назначает цену 6, а вторая фирма любую цену $P_2 > 6$. Таким образом, первой фирме не выгодно отклоняться, ведь она получает максимальную прибыль из всех возможных (являясь, по сути, монополистом), а вторая получает нулевую прибыль и никак не может ее увеличить (так как для того, чтобы продавать товар ей придется назначить цену $P_2 \leqslant 6$, что меньше ее предельных издержек).

Вот мы и нашли все равновесия в модели Бертрана. При разных функциях издержек множества равновесий, естественно, будут меняться.

Небольшой комментарий по тому, как **не надо** решать модель Бертрана. Довольно часто эту модель учат решать «сверху»: фирмы снижают цены, пока не достигнут уровня предельных издержек одной из фирм. Например, первая фирма назначат $P_1 = 9$. Тогда вторая фирма нзначит

$P_2 = 8.9$. Тогда первая перебьет ценой $P_1 = 8.8$ и так далее, пока мы не дойдем до уровня $P = 8$. Так как у второй фирмы $MC = 8$, она выйдет из борьбы, и первая будет иметь полную свободу действий. Дальше можно догадаться, что она снизит цену до $P_1 = 6$, но вот найти множество равновесий M_1 будет уже практически невозможно.

Так что рисуйте графики!

Модель Форхаймера (Модель Ценового Лидера)

Угадайте фамилию исследователя, в честь которого названа модель. А теперь по сути: как вы можете увидеть в названии, в модели присутствует одна фирма - **ценовой лидер**, **назначающая цену на товар**. Все остальные фирмы, присутствующие на данном рынке, **воспринимают цену как заданную**, и, соответственно, выбирают объем производства. Что интересно, при использовании данной модели в олимпиадных задачах часто не упоминается важная деталь: потребители сначала товар приобретают у всех остальных фирм, и, в последнюю очередь, у **ценового лидера**.

Давайте еще раз, как происходит взаимодействие:

1. Ценовой лидер назначает цену товара.
2. Все остальные фирмы предлагают какой-то объем товара по этой цене.
3. Если спрос остается неудовлетворен (то есть по данной цене образуется дефицит товара), то Ценовой лидер может продавать свой товар до того момента, пока спрос не останется удовлетворен.

Теперь обсудим, как решать модель, опять же, на примере задачи.

Рыночный спрос задан уравнением $Q_d = 120 - P$. На данном рынке присутствует Ценовой лидер с функцией издержек $TC = Q^2$, а также 10 других фирм, каждая из которых имеет издержки $TC = 5Q^2$. Нужно определить, какую оптимальную для себя цену назначит Ценовой лидер.

Мы знаем, сколько товара готовы купить потребители по заданной цене, так что нам нужно понять, сколько товара готовы продать остальные производители по заданной цене. Так как остальные фирмы воспринимают цену как заданную, то мы можем найти их **функцию предложения**, промаксимизировав их прибыль при заданной цене (назовем эти фирмы i):

$$\Pi_i = PQ - 5Q^2 \xrightarrow{Q} max$$

Парабола ветвями вниз. Вершина:

$$Q_i^* = \frac{P}{10}$$

Так как фирм десять, просто домножим данное количество на 10, получив суммарную функцию предложения:

$$Q_s = \frac{P}{10} * 10 = P$$

Таким образом, если ценовой лидер назначит цену P, то потребители будут готовы купить $Q_d = 120 - P$, а остальные фирмы будут готовы продать $Q_s = P$. При $P \geqslant 60$ спрос оказывается полностью удовлетворен, и ценовой лидер не сможет ничего продать. При $P < 60$ спрос оказывается неудовлетворен ($Q_d > Q_s$), следовательно, ценовой лидер сможет продать величину товара, равную разнице между спросом и предложением ($Q_d - Q_s$), то есть $120 - P - P = 120 - 2P$. Эта функция называется **остаточным спросом** на товар после того, как все остальные фирмы его продадут. В общем виде, наш остаточный спрос выглядит следующим образом:

$$Q_d = \begin{cases} 0 & P \geqslant 60 \\ 120 - 2P & P < 60 \end{cases}$$

С этим спросом ценовому лидеру можно работать как монополисту. Промаксимизируем прибыль, зная, что ценовой лидер может назначать цену и то, как она влияет на величину спроса (сразу отмечу, что на верхнем участке ценовой лидер работать не будет, так как прибыль там равна нулю):

$$Q = 120 - 2P$$

$$P = 60 - \frac{Q}{2}$$

$$\Pi = PQ - TC = (60 - \frac{Q}{2})Q - Q^2 = 60Q - \frac{3Q^2}{2} \xrightarrow{Q} max$$

График - парабола ветвями вниз, так что нам нужна вершина:

$$Q^* = 20$$

$$P^* = 60 - \frac{Q}{2} = 50$$

Вот, собственно, и все. Мы научились решать модель ценового лидера.

Модель Хотеллинга

Данная модель, предложенная американским экономистом Гарольдом Хотеллингом, часто используется в качестве демонстрации рынка монополистической конкуренции. У этой модели больше всего разновидностей, и мы с вами разберем одну из них - более-менее базовую и олигополистичную. Также хочется заметить, что данная модель все чаще и чаще применяется в олимпиадной экономике в последнее время.

Представим себе город, являющийся отрезком (линейный город). Вот, собственно, он:

Рис. 70: Линейный город

В городе живут люди, причем они равномерно распределены на протяжении всего отрезка. Пусть длина города будет равняться 100, и в нем будут жить 100 людей. Более того, если мы возьмем какой-нибудь отрезок длиной X, то в нем будут жить ровно X людей. Например, так как отрезок CD имеет длину 25, то в нем будут жить ровно 25 людей.

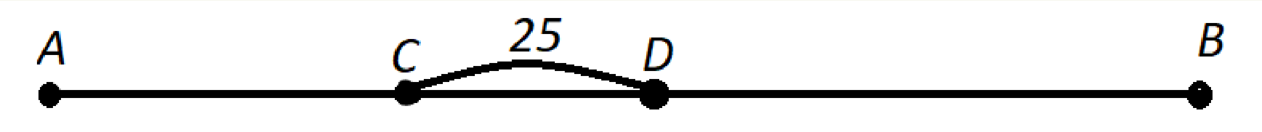


Рис. 71: Что-то типо района

В точках A и B (на границе города) расположены две фирмы, которые производят товар, необходимый в количестве 1 штуки каждому человеку, живущему в данном городе. Каждому человеку, чтобы купить товар, необходимо добраться до фирмы, причем, если человек живет на расстоянии

Y до фирмы, то ему будет стоить ровно Y д.е. добраться до нее и вернуться обратно. Также, чтобы приобрести товар, потребителю придется заплатить P_a, если он покупает его у фирмы A и P_b, если он покупает его у фирмы B. Мы считаем, что фирмы производят однородный товар.

Фирмы же несут издержки на производство товара. В нашей задаче они будут следующими:

$$TC_a = 100Q_a$$

$$TC_b = 50Q_b$$

Фирмы одновременно назначают цены, которые установят на свои товары. необходимо определить, какие цены установят фирмы на свой товар в равновесии.

Перед этими фирмами стоит нелегкая задача: с одной стороны, хочется поднять цены, чтобы увеличить выручку, а с другой - снизить, чтобы переманить потребителей на свою сторону.

Давайте посмотрим сначала, как в такой ситуации действует потребитель. Пусть есть какой-то человек, живущий в точке Z:

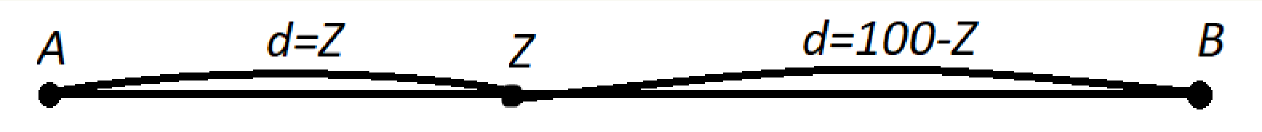


Рис. 72: Человечишко

Так как он живет в точке с координатой Z, то добраться до фирмы A и обратно будет стоить ему Z д.е., а до фирмы B и обратно - $100 - Z$ д.е. Итого он заплатит $P_a + Z$, если будет покупать товар у фирмы A и $P_b + 100 - Z$, у фирмы B. Так как товар одинаковый, то потребитель, конечно же, выберет тот вариант, который обойдется ему дешевле.

Как вы можете заметить, чем большее значение Z, тем дороже потребителю покупать товар у фирмы A и тем дешевле покупать его у фирмы B, так как он просто находится к ней ближе. Таким образом, существует человек, которому **все равно**, у кого покупать товар (если такого человека не существует, то все покупают товар у одной из фирм и мы получим это в ходе решения). Для него будет верно, что $P_a + Z = P_b + 100 - Z$. Следовательно, все люди слева от него будут покупать товар у фирмы A, а все люди справа - у фирмы B.

Найдем тогда, какую позицию будет занимать этот человек, в зависимости от назначенных цен:

$$P_a + Z = P_b + 100 - Z$$

$$Z = \frac{P_b - P_a + 100}{2}$$

Следовательно, ровно $\frac{P_b - P_a + 100}{2}$ людей купят товар у фирмы A, а оставшиеся - у фирмы B.

Теперь, когда мы задали такого человека, можем просто промаксимизировать прибыли каждой фирмы, чтобы получить их линии реакции (так как мы ищем равновесие).

Выпишем прибыль фирмы A:

$$\Pi_a = P_1Q - TC_a = P_a * (\frac{P_b - P_a + 100}{2}) - 100\frac{P_b - P_a + 100}{2} = \frac{P_aP_b}{2} + 100P_a - \frac{P_a^2}{2} - 50P_b - 5000 \xrightarrow{P_a} max$$

График - парабола ветвями вниз. Значит, ищем вершину:

$$P_a^* = \frac{P_b}{2} + 100$$

Под ограничение $P_a \geqslant 0$ подходит, так что это наш оптимум. Аналогично находим оптимум для фирмы B:

$$P_b^* = \frac{P_a}{2} + 75$$

Осталось только найти пересечение линий реакций! Так как это просто две прямые, их можно не рисовать, а просто решить систему:

$$\begin{cases} P_a = \frac{P_b}{2} + 100 \\ P_b = \frac{P_a}{2} + 75 \end{cases}$$

Решив систему, получаем, что $P_a = \frac{550}{3}$, а $P_b = \frac{500}{3}$. Таким образом, мы решили модель Хотеллинга.

Государственное вмешательство и общественное благосостояние

В этом разделе речь пойдет о том, зачем и какими способами регулируется рыночная экономика. Тема государственного вмешательства распространяется на все остальные темы в экономике: государство может вмешиваться в рыночные структуры, в процессы производства и вообще куда оно захочет.

Мы по очереди рассмотрим основные методы государственного вмешательства и их влияние на поведение фирм, а также на общественное благосостояние.

Общественное благосостояние

Общественное благосостояние ($SW - Social\ Welfare$) - это величина, выраженная в д.е. и показывающая то, сколько заработало общество в целом в результате торговли.

Общественное благосостояние состоит из четырех основных компонент:

1. Излишек производителя ($PS - Productor's\ Surplus$). Это самая простая составляющая общественного благосостояния: излишек производителя всегда отображает прибыль фирм, которую они получили от продажи товара.

2. Излишек потребителя ($CS - Consumer's\ Surplus$). Вы удивитесь, но потребитель также зарабатывает от торговли засчет неявной прибыли! Давайте рассмотрим пример, чтобы понять, как именно это происходит.

   Допустим, Васе безразлично, что иметь в кармане: яблоко или 10 рублей. То есть, если он купит яблоко за 10 рублей, его полезность никак не измениться (в таком случае говорят, что Вася готов заплатить за яблоко 10 рублей). И вот Вася, имеющий в кармане 10 рублей, приходит на рынок и видит, что яблоки там продаются по 8 рублей. Естественно, Вася покупает яблоко, и у него остается 2 рубля. Итого, у Васи теперь есть яблоко, которое для него эквивалентно 10 рублям, а также 2 рубля монетками: итого 12 рублей. Таким образом, купив яблоко, Вася заработал 2 рубля.

3. Излишек государства ($GS - Government\ Surplus$). Он обозначает сальдо государственного бюджета в отношении рассматриваемого рынка. Другими словами, излишек государства обозначает, на сколько в минусе или в плюсе осталось государство после вмешательства в рынок. В отличии от излишков потребителя и производителя, излишек государства может быть отрицательным. Если государство не вмешивается в рынок, то излишек государства равен 0.

4. Экстерналии (внешние эффекты). Рынок может оказывать как негативное, так и позитивное влияние на области, к которым не имеет прямого отношения.

   Пример негативного внешнего эффекта: целлюлозный завод сливает отходы в реку, от чего портится здоровье людей, черпающих из него воду.

   Пример положительного внешнего эффекта: производящие электроэенергию ветряные установки создают вибрацию, из-за чего с полей пропадают кроты и грызуны, уничтожающие урожай.

   Экстреналии могут быть выражены в денежном эквиваленте и включены в функцию общественного благосостояния.

Давайте рассмотрим самый классический рынок совершенной конкуренции без вмешательства государства и без внешних эффектов, а также возьмем на нем какую-нибудь конкретную единицу товара (Q_1):

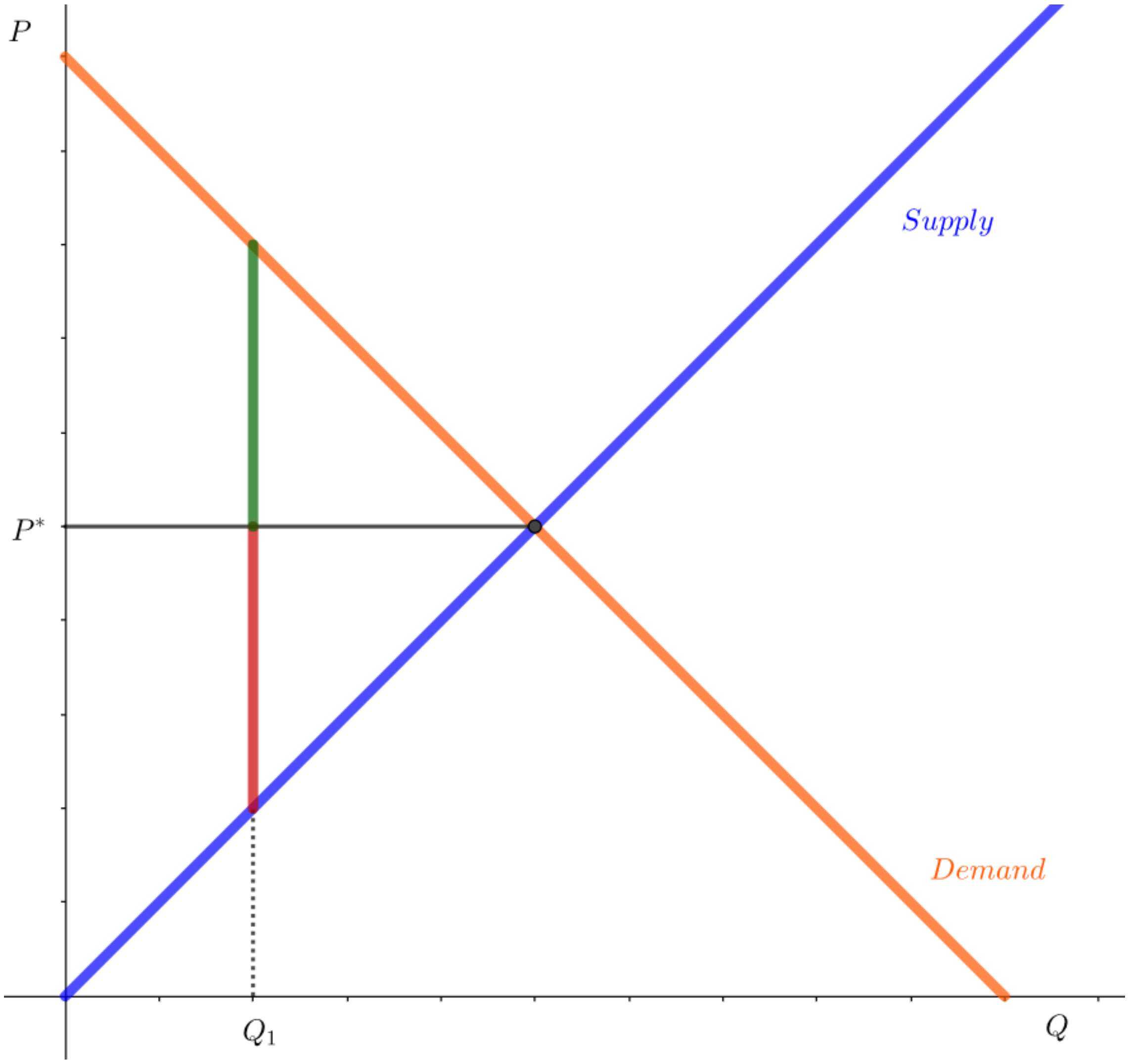


Рис. 73: Выгода потребителя и производителя

Теперь вспомним, что фукнции спроса и предложения являются результатами максимизации полезности потребителя и прибыли производителя соответственно.

Таким образом, предложение для каждого количества показывает, сколько денег было потрачено на производство товара. Тогда разница между равновесной ценой и значение по цене функции предложения показывает, сколько заработал производитель конкретно с этой единицы товара (на графике обозначено красным отрезком).

Со спросом все точно также, только значение на спросе показывает, сколько потребитель был готов заплатить за эту единицу товара (другими словами, сколько она ему принесет полезности в денежном эквиваленте). Разница между тем, сколько потребитель был готов заплатить и сколько он в действительности заплатил показывает, сколько неявной прибыли он получил с покупки этого товара (на графике отмечено зеленым отрезком).

Небольшое замечание: спрос отображает излишек потребителя **только** если выведен из **квазилинейной** функции полезности. Квазилинейная функция полезности - функция вида $U = f(x) + y$, где x - основной товар, а $P_y = 1$. Можете проверить и повыводить денежный эквивалент купленного товара для квазилинейной и неквазилинейной функций, если вы вообще понимаете о чем речь.

Из-за такого свойства спроса излишек потребителя обычно напрямую задают функцией прямо в тексте задач. Однако, если этого в задаче нет, а от вас все равно требуют посчитать что-то, связанное с излишком потребителя, стоит принимать его за площадь между спросом и равновесной ценой.

Теперь, если мы найдем такие отрезки для каждого проданного количества товара, то получим, сколько в сумме заработали все потребители и все производители:

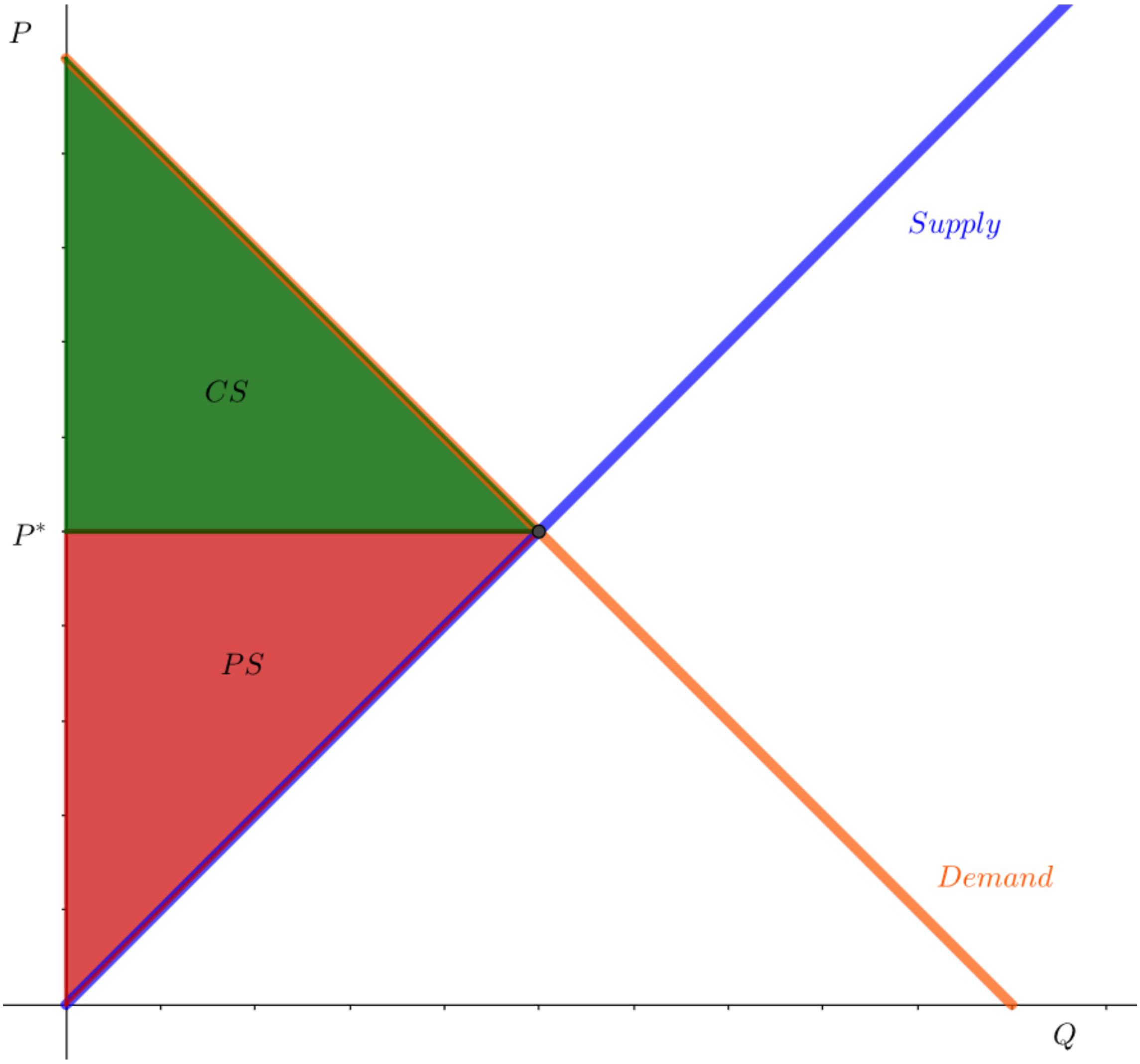


Рис. 74: Излишки потребителя и производителя при совершенной конкуренции

Сумма этих излишков и будет являться общественным благосостоянием.

Например, вот так будут выглядеть излишки при монополии на рынке (оптимум будет в пересечении MR и MC):

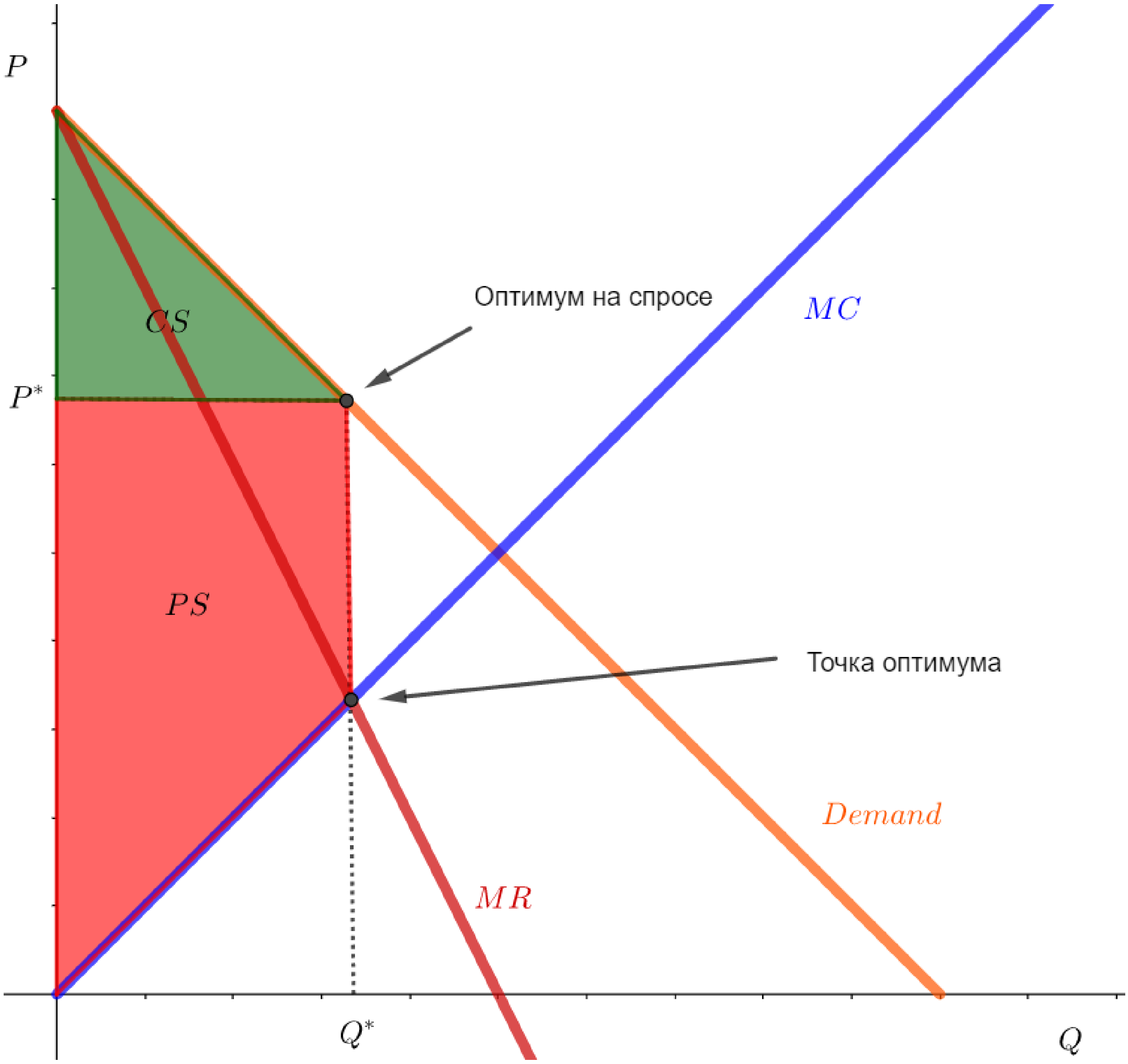


Рис. 75: Излишки потребителя и производителя при монополии

Если общественное благосостояние по какой-либо причине уменьшается, то потери в общественном благосостоянии называют **Потерями Мертвого Груза** (DWL – *Dead Weight Loss*).

Данная теория нам понадобится, когда мы будем рассуждать о влиянии государственного вмешательства в экономику на излишки и общественное благосостояние.

Налоги и субсидии

Налоги и субсидии - основные методы государственного вмешательства. Налоги и субсидии в микроэкономической теории выполняют две важные функции: **фискальную** и **регулирующую**. Фискальная фукнция состоит в увеличении или расходовании государственного бюджета. Регулирующая фукнция состоит в влиянии налогов на объемы производства и цен на рынке товаров и услуг.

Системы налогообложения принято делить на регрессивную (чем меньше доход агента, тем большую часть из него он заплатит), прогрессивную (чем больше доход агента, тем большую часть из него он заплатит) и пропорциональную (со всех взымается одинаковый налог). Однако же, в олимпиадной экономике данные понятия используются довольно редко, так что просто запомните их и имейте в виду, их могут дать в тестах.

Также налоги могут накладываться на производителя и на потребителя. То, на кого наложен налог, обозначает, кто будет платить по итогу деньги государству. Обычно все налоги накладываются на производителя (если не сказано иного), так как это соответствует реальности: гораздо проще собрать налог с фирмы, чем со всех потребителей, которые у нее что-то купили. Так что далее мы будем рассматривать все налоги подразумевая, что ими облагаются производители блага.

Существует определенное количество базовых налогов, которые применяются государством. По очереди рассмотрим их и как они связаны. Ставка налога в каждом случае обозначается буквой t (tax), суммарные налоговые сборы обозначаюся T.

Кстати, учитывайте, что субсидия, по сути, просто является отрицательным налогом. Все дальнейшее будет касаться только налогов, но применимо и к соответствующим субсидиям.

Также важно понимать, что в случае с налогами и субсидиями существуют различные определения цены. Давайте с ними ознакомимся:

1. P_s - цена производителя ($Supply$). Это то количество денег, которое в итоге получит производитель товара за каждую проданную единицу.

2. P_d - цена потребителя ($Demand$). Это то количество денег, которое в итоге заплатит потребитель за приобретение единицы товара.

3. P_m - рыночная цена ($Market$). Эта та цена, которая будет написана на ценнике товара в магазине.

Существуют задачи, в которых все три цены являются различными. Эти различия будут рассмотрены далее. Довольно важно также понимать, что всегда, когда вас просят найти цену в задаче, от вас требуется найти **рыночную** цену, то есть P_m.

А теперь, наконец, переходим к различным налогам!

Потоварный налог

Потоварный налог - самый простой в плане включения в экономические модели, так что он используется в 95% всех задач. Суть потоварного налога заключается в том, что государство взымает фиксированную сумму за каждый проданный или купленный товар.

Соотношения цен и общие налоговые сборы

В случае введения потоварного налога выполняется следующее соотношение между ценой потребителя и производителя:

$$P_s = P_d - t$$

Это происходит потому, что из суммы, заплаченной потребителем, t д.е. уйдет государству, а остальное останется производителю. Рыночная же цена P_m зависит от того, на кого введен налог. Если налог введен на потребителя, то производитель получит ровно рыночную цену, а потребитель после уплаты рыночной цены заплатит еще и t д.е., то есть:

$$P_s = P_m$$

$$P_d = P_m + t$$

Если же налог введен на производителя, то, наоборот: потребитель заплатит только то, что написанно на ценнике, а производитель отдаст из этой суммы часть t государству:

$$P_s = P_m - t$$

$$P_d = P_m$$

В любом случае, то, на кого вводится налог, не имеет значения. Так как $P_s = P_d - t$ верно в обоих случаях, равновесное количество товара будет одинаковым, как и равновесные цены P_s и P_d. Разница будет заключаться лишь в цене, написанной на ценнике (рыночной цене P_m).

Общий налоговый сбор в случае потоварного налога имеет формулу $T = t * Q$.

Влияние на оптимизацию фирмы

Потоварный налог довольно просто включается в функцию прибыли фирма в качестве слагаемого $-tQ$. Если обложить фирму потоварным налогом, то ее прибыль будет иметь следующий вид:

$$\Pi = PQ - TC - T = PQ - TC - tQ$$

Заметьте, что эту же прибыль можно записать следующим образом:

$$\Pi = (P - t)Q - TC$$

Таким образом, при потоварном налоге фирма может просто считать, что цена уменьшилась на величину налога. То же самое

Также прибыль можно представить еще и в следующем виде:

$$\Pi = PQ - TC - T = PQ - AC * Q - t * Q = PQ - (AC + t)Q$$

Таким образом, можно также считать, что средние издержки фирмы выросли на величину потоварного налога.

Влияние на рынок совершенной конкуренции

Как мы можем понять из вышеописанного влияния потоварного налога на прибыль фирмы, она начинает воспринимать цену на t меньшую, чем есть на самом деле. Таким образом, если до введения налога функция предложения фирмы описывалась зависимостью $Q_s = f(P)$, то теперь она преобразуется в $Q_s = f(P - t)$.

Например, если изначально предложение описывалось зависимостью $Q_s = 2P - 60$, то после введения потоварного налога в размере 30 д.е. предложение будет описываться зависимостью $Q_s = 2(P - 30) - 60$. На графике введение потоварного налога обозначается как сдвиг предложения вверх на величину t.

В результате цена, которую заплатит потребитель (P_d), повысится, а цена, которую получит производитель (P_s), уменьшится. То, насколько увеличилась цена потребителя, называют **налоговым бременем потребителя** (t_d). То, насколько уменьшилась цена производителя, называют **налоговым бременем производителя** (t_s). В сумме они всегда дают суммарные сборы ($t_s + t_d = t$). Это будет также верно для всех остальных налогов.

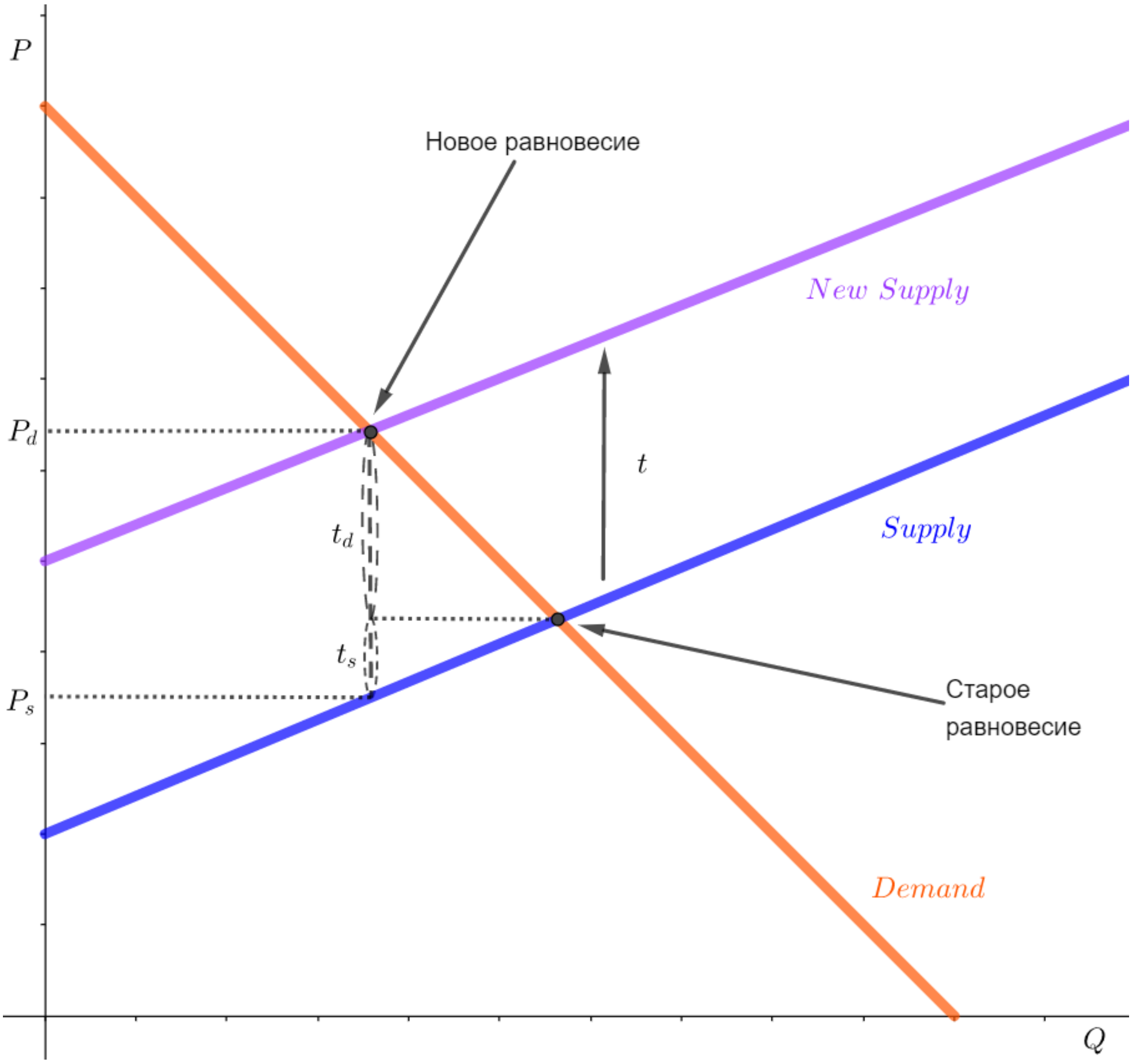


Рис. 76: Введение потоварного налога

Как вы можете заметить, практически всегда при введении налога равновесная цена будет увеличиваться, а равновесное количество будет снижаться.

Оптимизация налоговых сборов

Довольно часто перед олмпиадниками ставят задачу определить оптимальную ставку налога, максимизирующую налоговые сборы. Сразу же определимся, почему просто нельзя назначить налог побольше и получить просто больше налоговых сборов: из-за введения налога у фирмы снижаются стимулы к производству товара. Таким образом, мы получим мало налоговых сборов не только если введем маленькую ставку налога, но и если введем слишком большую, так как облагать таким налогом будет нечего.

Итак, наша задача - промаксимизировать налоговые сборы при потоварном налоге:

$$T = tQ \xrightarrow{t} max$$

Проблема в том, что Q не является константой, а зависит от ставки потоварного налога. Для того, чтобы промаксимизировать налоговые сборы, нам необходимо узнать эту зависимость.

Давайте рассмотрим пример задачи с монополистом:

$$Q_d = 100 - P$$
$$TC = Q^2$$

Наша задача получить максимльные налоговые сборы с данного монополиста. Данную задачу можно представить как последовательное взаимодействие двух агентов: сначала «ходит» государство, назначая ставку налога, а затем монополист выбирает оптимальное количество и цену. Такие задачи мы решаем с конца: так как для монополиста ставка налога будет являться константой, он может промаксимизировать свою прибыль:

$$\Pi = PQ - TC - tQ = (100 - Q)Q - Q^2 - tQ = (100 - t)Q - 2Q^2 \xrightarrow{Q} max$$

$$Q^* = \frac{100 - t}{4}$$

Как раз видно, что чем больше налог, тем меньше оптимальное количество товара.

Проверяем на ограничение $Q \geqslant 0$, которое выполняется при $t \leqslant 100$, и получаем следующую реакцию монополиста на введенный налог:

$$Q = \begin{cases} \frac{100-t}{4} & t \leqslant 100 \\ 0 & t > 100 \end{cases}$$

Заметьте, что точно также можно найти зависимость равновесного количества от ставки налога на рынке совершенной конкуренции. Достаточно пересечь измененную функцию предложения $Q = f(P - t)$ со спросом.

Теперь можно сказать, что государство не введет $t > 100$, ведь тогда оно вообще не получит никаких налоговых сборов, так что мы будем использовать первый участок. Подставим его в целевую функцию государства:

$$T = tQ = t\frac{100 - t}{4} = \frac{100t - t^2}{4} \xrightarrow{t} max$$

$$t^* = 50$$

Вот мы и нашли оптимальную ставку потоварного налога. В случае, если нужно получить какие-то конкретные налоговые сборы (не обязательно максимальные), действовать нужно точно также: искать зависимость равновесного количества от t, а затем не максимизировать эту функцию, а приравнивать к нужному числу и решать уравнение.

Влияние на общественное благосостояние

Введение налога сильно меняет баланс излишков в экономике.Чтобы посмотреть, как именно это происходит, будем анализировать рынок совершенной конкуренции. Для монополии все будет аналогично.

Вспоминаем, что введение потоварного налога сдвигает предложение вверх на величину налога и смотрим на то, кто сколько получает в новом равновесии при случайно выбранном количестве:

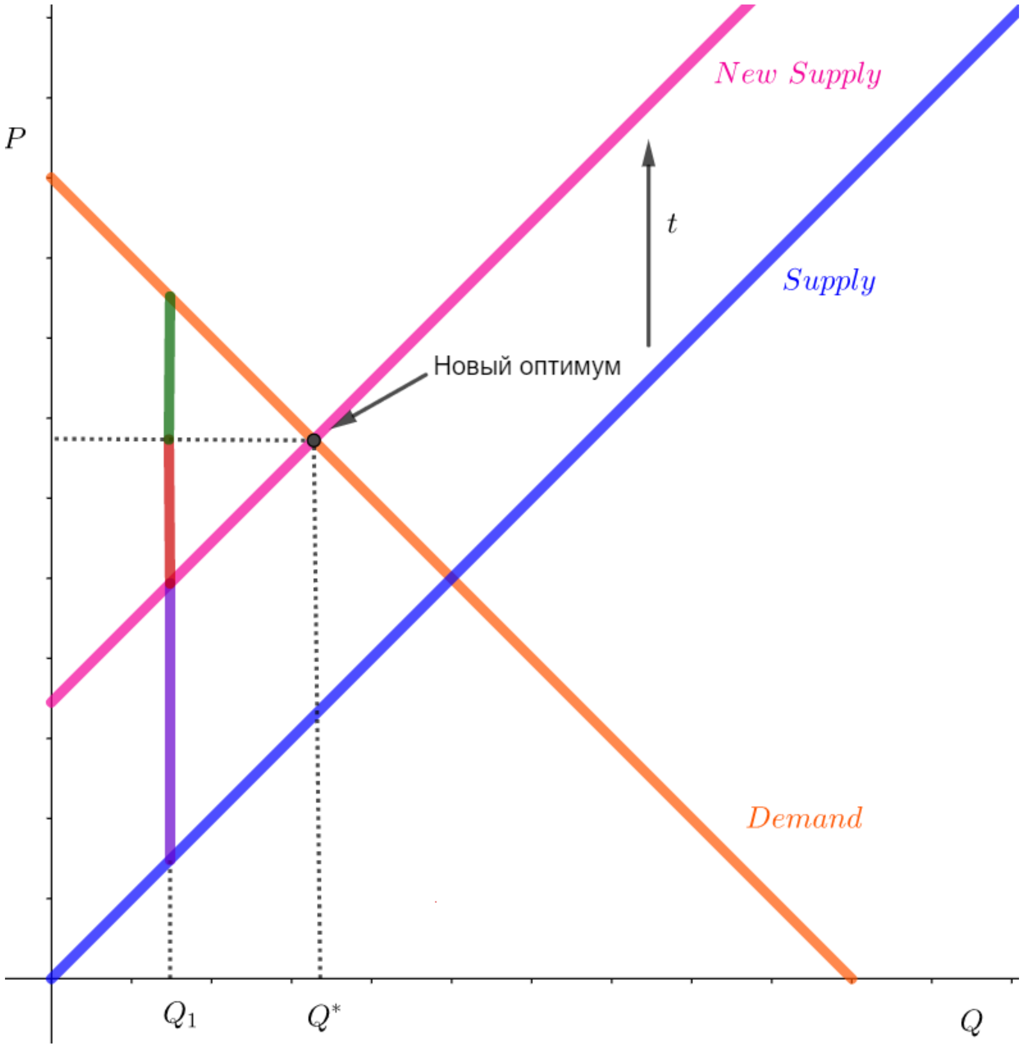


Рис. 77: Излишки с конкретного товара

То, что получает потребитель, отмечено зеленым: это разница между его готовностью платить и равновесной ценой. С производителем не все так просто: так как введен налог, то теперь он получает разницу между равновесной ценой и новым предложением, так как именно новое предложение показывает стоимость производства товара вместе с налогом (отмечено красным). Государство же получает налог, то есть разницу между старым и новым предложением (отмечено фиолетовым).

Если теперь мы нарисуем соответствующие излишки для каждой торгуемой единицы товара, то мы получим суммарные излишки каждой группы, участвующей в данном рынке: потребителя (CS), производителя (PS) и государства (GS):

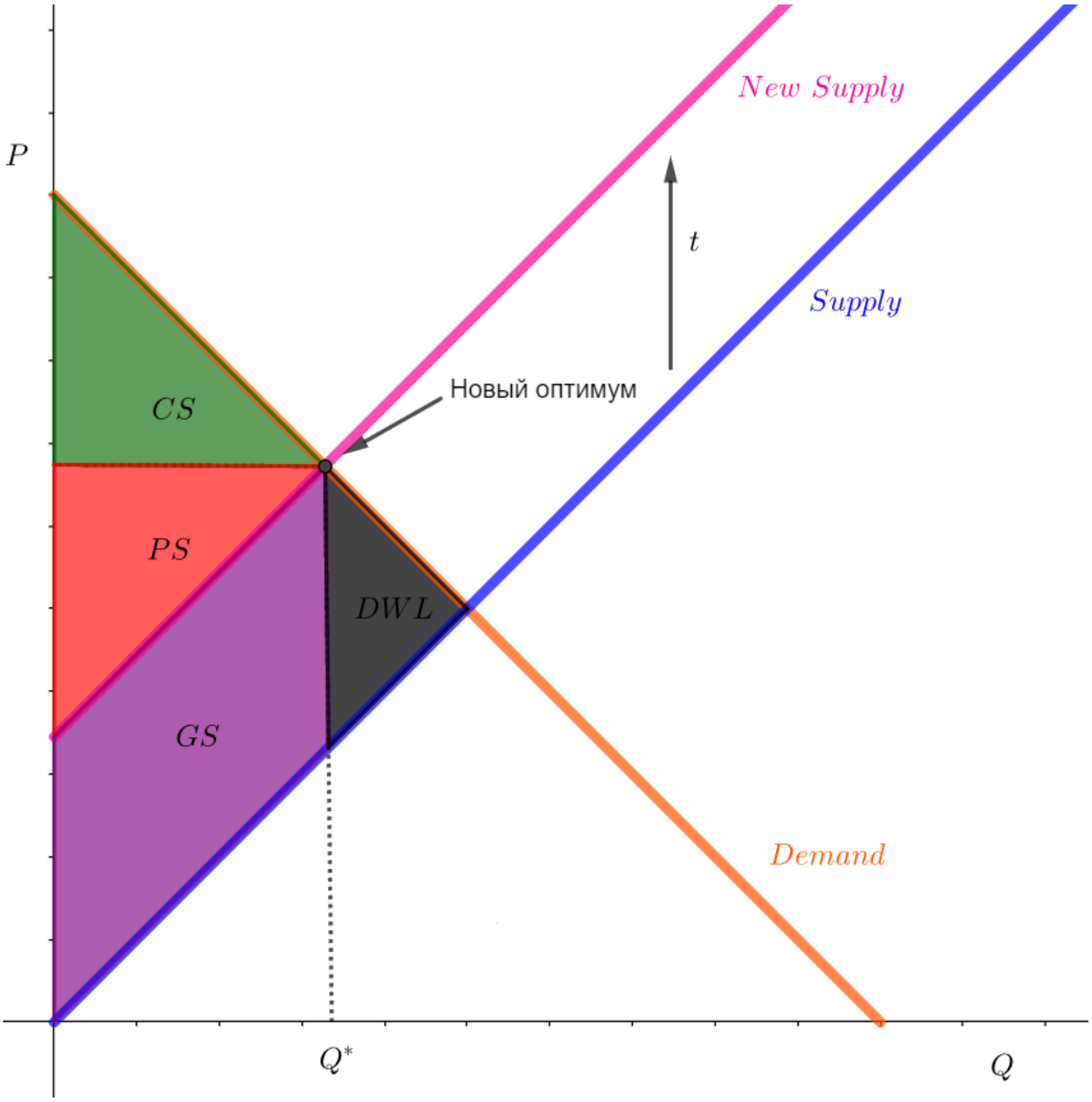


Рис. 78: Общественное благосостояние с налогом

Как мы можем заметить, сумма трех излишков стала меньше по сравнению с тем, что было до налога (туда тогда еще входил серый треугольник, можете посмотреть структуру излишков без налога в теме «Общественное благосостояние»). Как раз на этот серый треугольник благосостояние и уменьшилось: это и есть DWL от вмешательства государства в экономику.

Отдельно мы с вами рассмотрим изменение благосостояние при потоварной субсидии, так как принцип здесь качественно отличается от налога.

Вспоминаем, что субсидия - это просто отрицательный налог, так что он приводит к сдвигу предложения **вниз** на величину субсидии. Посмотрим на следующий график, на котором изображено начальное благосостояние, а также излишек каждого агента с конкрентной единицы товара при введении субсидии:

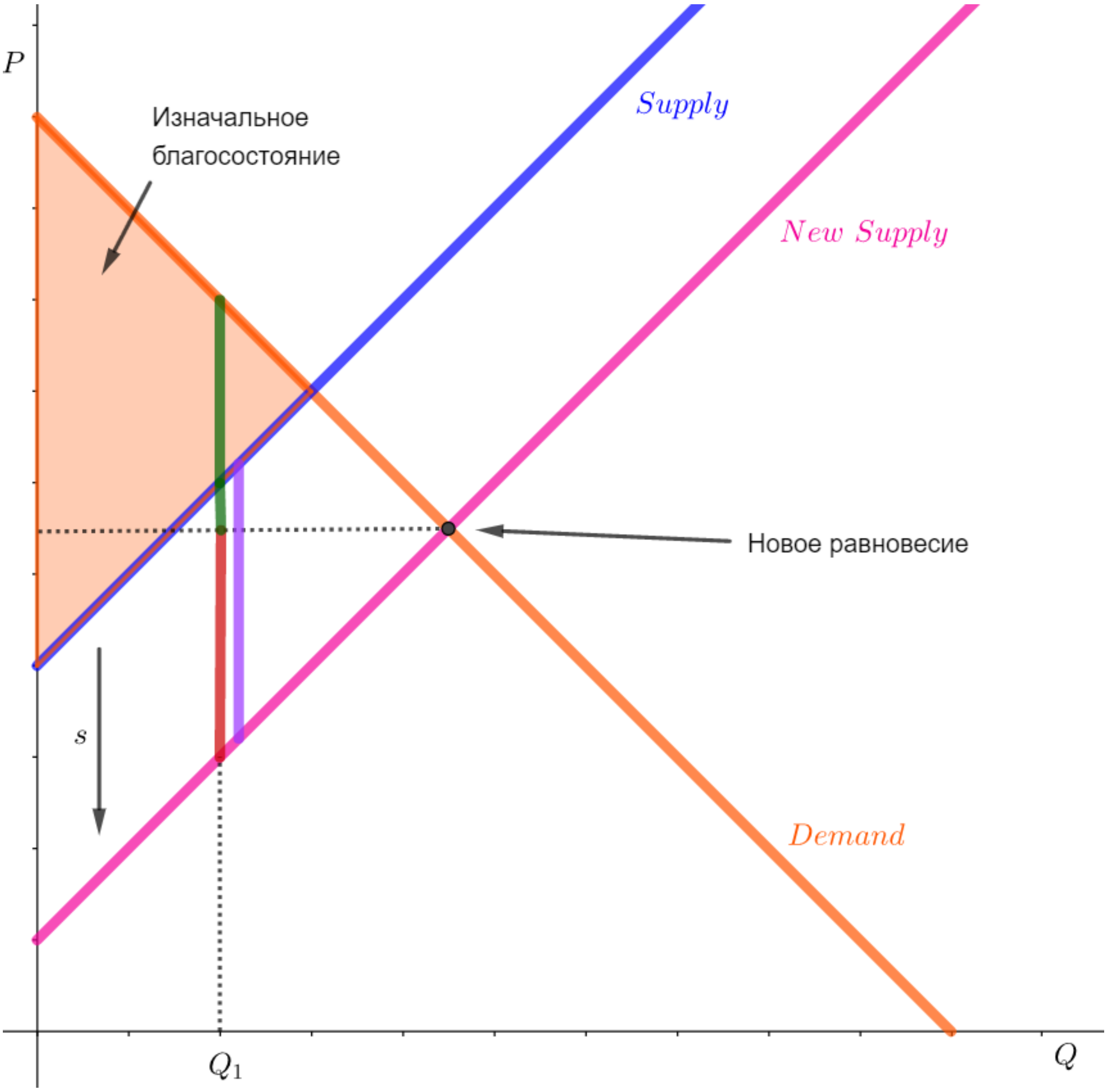


Рис. 79: Излишки с единицы товара

Как вы можете заметить, с излишком потребителя (зеленый) все как обычно. Все интереснее с излишком производителя. Как вы можете заметить, данная единица товара (Q_1) стоит в производстве больше, чем ее цена (сколько она стоит в производстве показывает значение старого предложения). Однако же, она все равно продается, так как производитель получает за нее субсидию. В итоге, с этой единицы производитель заработает чуть меньше, чем размер субсидии (красный отрезок).

Государство же в данной ситуации вообще имеет отрицательный излишек, так как тратит деньги на субсидирование фирмы. Размер субсидии является разницей между старым и новым предложением и отмечен фиолетовым отрезком.

Теперь сложим отрезки для всех торгуемых единиц товара, и получим следующие излишки:

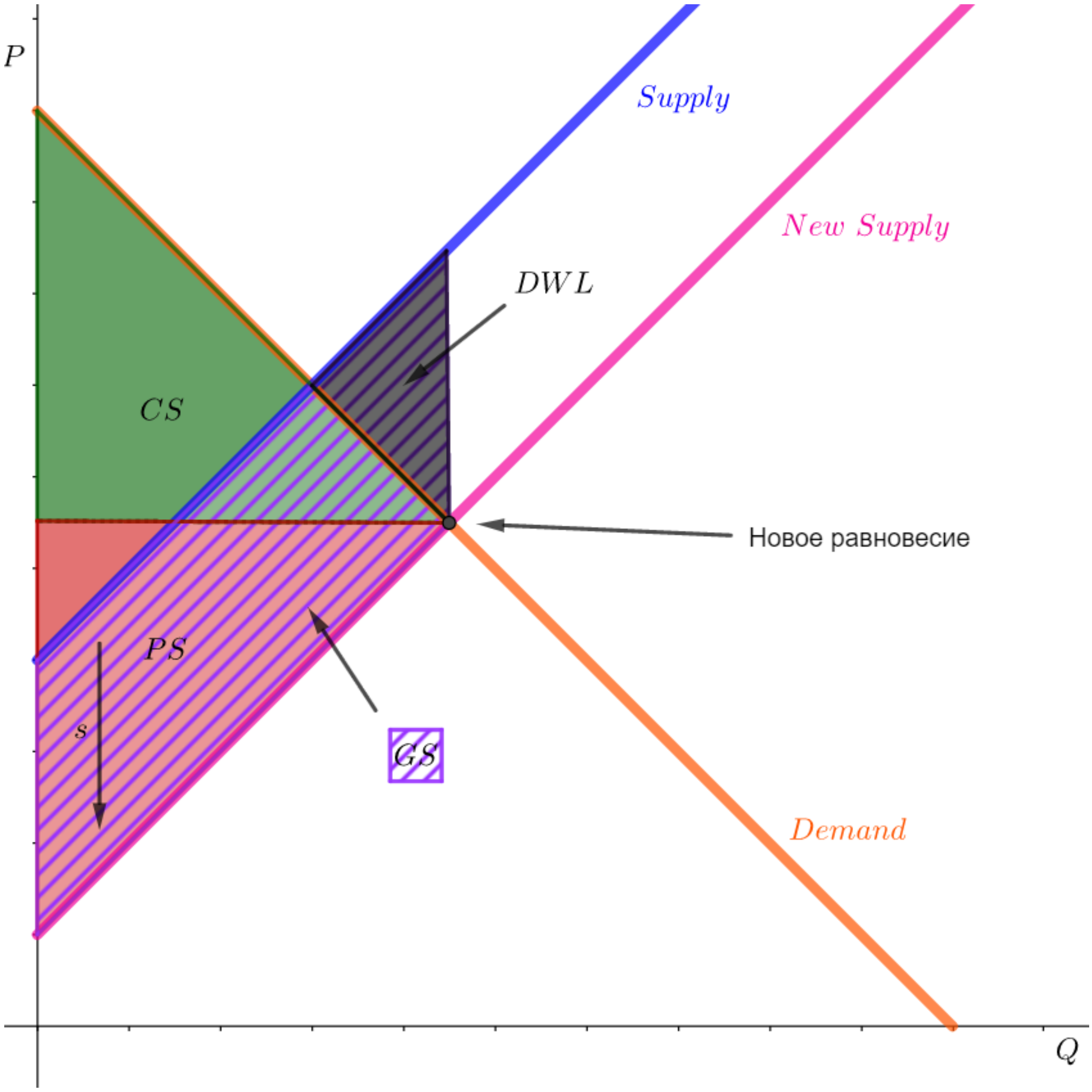


Рис. 80: Общественное благосостояние при потоварной субсидии

Зеленая площадь - CS, красная - PS, заштрихованная - GS, то есть потери государства. Сравнив полученные площади с изначальным благосостоянием понимаем, что сумма излишков потребителя и производителя увеличилась, но на меньшую площадь, чем затраты государства. Таким образом, государственные затраты нивелировали увеличение излишков потребителя и производителя, и даже превзошли их на площадь, равную серому треугольнику. Это и есть DWL - потери общестенного благосостояния из-за введения субсидии.

Акцизный налог и НДС

Акцизный налог и НДС (Налог на Добавочную Стоимость) также называются в микроэкономике процентными налогами из-за их определения: они берутся в процентах от определенной величины.

Акцизный налог - это налог, взымаемый от рыночной цены товара. Так как мы рассматриваем налог на производителя, то акцизный налог берется в процентах от цены потребителя (в этом случае она равна рыночной).

Налог на добавочную стоимость (НДС) - это налог, взымаемый с цены производителя, то есть с той суммы, которую получит производитель за единицу своего товара. Цена производителя иногда назывется добавочной стоимостью товара, из чего и берется название налога.

Во всех случаях ставка налога обозначается за t и представляет из себя долю от цены. При НДС t может быть больше 1, в таком случае государство получает больше, чем зарабатывает производитель. В случае акциза t **не** может быть больше 1, так как нельзя забрать больше денег, чем заплатил потребитель.

Соотношения цен и налоговые сборы

Акциз

Так как акциз берется от цены потребителя P_d, то сумма налога с единицы товара равняется $t{*}P_d$ (эта величина будет равна разнице между тем, сколько заплатит потребитель и сколько получит по итогу производитель, то есть $P_d - P_s$). Таким образом, получаем соотношения цен:

$$P_m = P_d$$
$$P_d - P_s = t * P_d$$
$$P_s = P_d * (1 - t)$$

Общие налоговые сборы в данном случае имеют вид $T = t * P_d * Q$.

НДС

НДС отличается только тем, что берется не с P_d, а с P_s. Таким образом, сборы с единицы товара составят $t * P_s$. Тогда соотношения цен (помним, что налог вводится на производителя):

$$P_m = P_d$$
$$t * P_s = P_d - P_s$$
$$P_s = \frac{P_d}{1+t} = \frac{1}{1+t} P_d$$

Общие налоговые сборы имеют вид $T = t * P_s * Q$.

Влияние на оптимизацию фирмы

Акциз

Так как у нас забирают часть t от цены, то можно считать, что у нас забирают часть t от выручки. Таким образом, в этом плане акциз оказывается эквивалентен налогу на выручку (в экономике называется подоходным налогом). Прибыль после введения акциза выглядит следующим образом:

$$\Pi = (1 - t)PQ - TC$$

НДС

В данном случает мы получаем $\frac{1}{1+t}$ от цены товара (выводили это в соотношениях цен). То есть прибыль будет выглядеть следующим образом:

$$\Pi = \frac{PQ}{1+t} - TC = \frac{1}{1+t} PQ - TC$$

Влияние на рынок совершенной конкуренции

Давайте внимательно посмотрим на то, как два данных налога влияют на цену производителя. При акцизе верно, что $P_s = (1-t)P_d$, а при НДС - $P_s = \frac{1}{1+t}P_d$. Если вы смотрите внимательно, то можете заметить, что в каждом случае цена просто домножается на величину, меньшую 1.

Предположим, изначально на рынке имелась функция предложения $Q_s = f(P_s)$. Тогда в случае акциза она превратиться в $Q_s = f((1-t)P_d)$, а в случае с НДС - в $Q_s = f(\frac{1}{1+t}P_d)$. С математической точки зрения это растяжение относительно оси Q в обоих случаях, просто на разные величины, в зависимости от такого, какой налог был введен. Посмотрим, как это выглядит на графике:

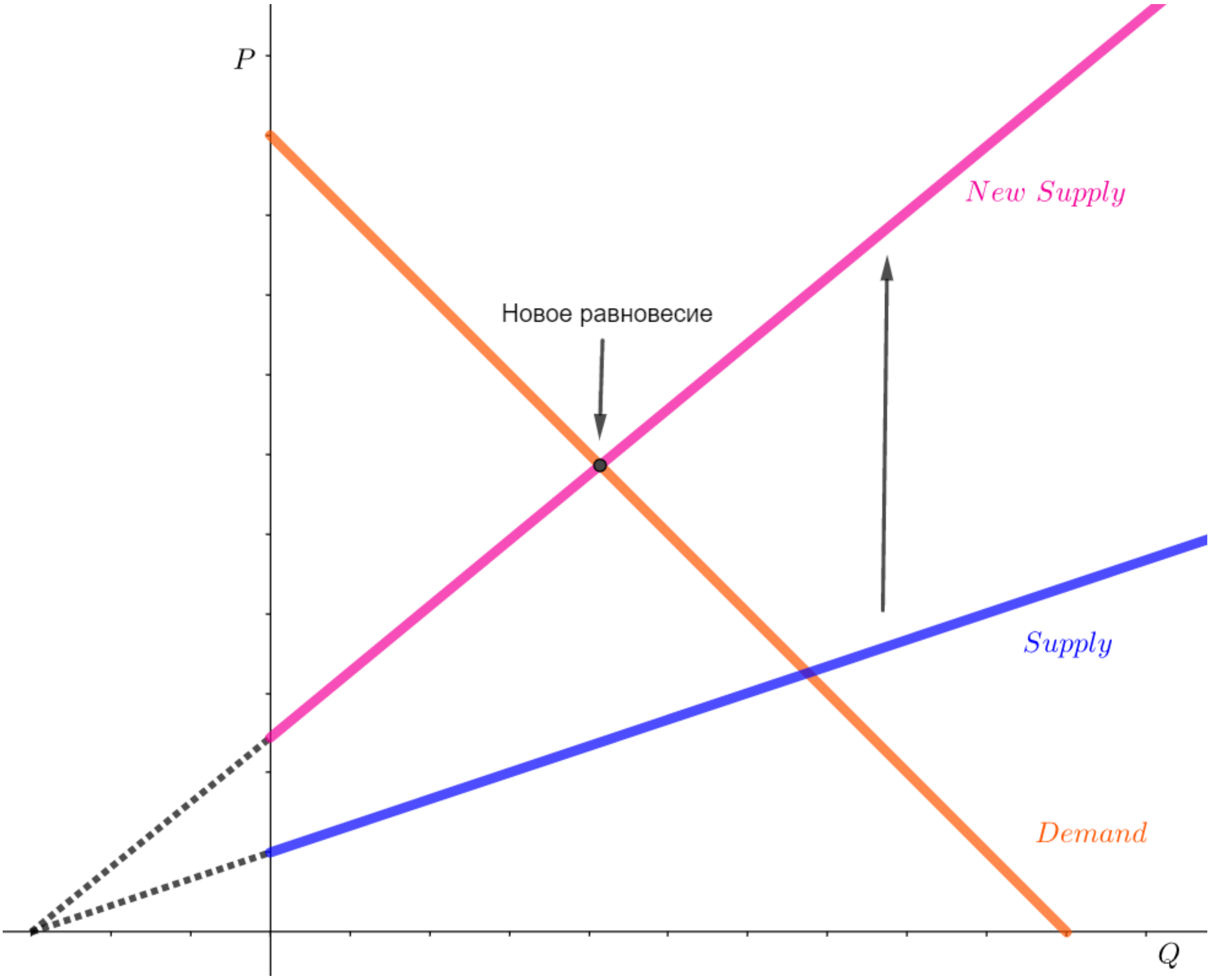


Рис. 81: Введение процентного налога

Например, если ранее функция предложения имела вид $Q_s = 2P - 60$, то при введения акцизного налога в 30% ($t = 0.3$), функция предложения преобразуется в $Q_s = 2(1-0.3)P - 60 = 1.4P - 60$.

Максимизация налоговых сборов

Если вы попробуете промаксимизировать налоговые сборы таким же способом, каким мы это делали при потоварном налоге, то у вас ничего не выйдет. Можете проверить сами, а мы сразу же перейдем к одной интересной теореме, с помощью которой вы сможете промаксимизировать налоговые сборы с помощью НДС или акциза.

Теорема эквивалентности налогов заключается в том, что в совершенной конкуренции потоварный налог, налог на добавочную стоимость и акцизный налог оказываются абсолютно эквивалентны друг другу.

Сразу же перейдем к доказательству. То, что акцизный налог и НДС эквивалентны, мы уже убедились: они оба приводят к «повороту» предложения, так что, если мы попадем в какое-то равновесие с помощью акциза, то, попав в эту же точку с помощью НДС, мы получим одинаковое количество товара, одинаковую рыночную цену, а также одинаковую цену производителя, так как разница между старым и новым предложением в точке равновесия будет одинаковой (а эта разница показывает величину сборов с 1 единицы товара).

Теперь посмотрим, почему процентный налог и потоварный налог также эквивалентны. Для этого введем потоварный налог и процентный таким образом, чтобы попасть в одну и ту же новую точку равновесия:

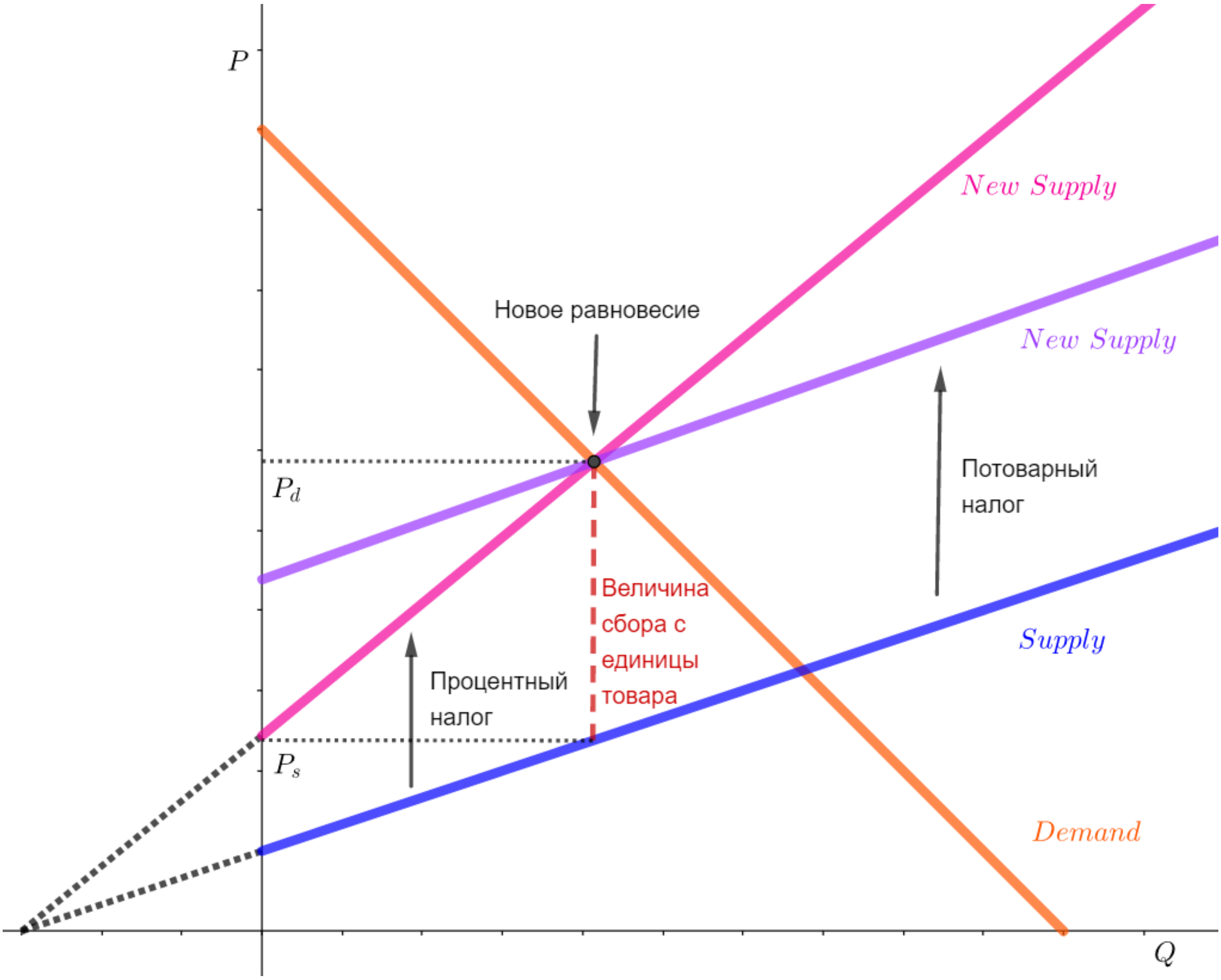


Рис. 82: Эквивалентность налогов

Из графика видно, что в новом равновесии при обоих налогах оказываются одинаковые Q, P_d, P_s, а также налог с единицы товара. Таким образом, и общие налоговые сборы оказываются одинаковы.

Для чего же это нам нужно? А для того, чтобы немного упростить задачу максимизации налоговых сборов процентными налогами. Если найти потоварный налог, максимизирующий налоговые сборы, и соответствующую ему точку равновесия, то в этой точке равновесия будут максимальные налоговые сборы также и для процентного налога!

Рассмотрим данный метод решения на примере задачи.

Допустим, спрос и предложение на рынке задаются следующими функциями:

$$Q_d = 120 - P$$
$$Q_s = P - 60$$

Нашей задачей будет найти оптимальную ставку акциза и НДС, которые максимизирую налоговые сборы с данного рынка.

Для этого найдем оптимальную ставку потоварного налога. Вводим налог:

$$Q_s = (P - t) - 60$$

Находим новое равновесие с налогом:

$$P - t - 60 = 120 - P$$
$$P^* = \frac{180 + t}{2}$$
$$Q^* = 120 - P = 30 - \frac{t}{2}$$

Здесь я не пишу участок при $t > 60$, так как там налоговые сборы будут равны 0.

Теперь, зная как рынок отреагирует на введение потоварного налога, промаксимизируем налоговые сборы:

$$T = tQ = t * (30 - \frac{t}{2}) = 30t - \frac{t^2}{2} \xrightarrow{t} max$$

Налоговые сборы имеют вид параболы ветвями вниз, так что нам нужна вершина:

$$t^* = 30$$

Таким образом, мы нашли оптимальную ставку потоварного налога. Теперь поймем, какую точку мы попадем:

$$P_d = P_m = \frac{180 + t}{2} = 105$$
$$P_s = P_d - t = 105 - 30 = 75$$

Осталось найти соответствующие ставки акциза и НДС, с помощью которых мы попадем в ту же точку.

Оптимальная акцизная ставка: чтобы попасть в ту же точку, нужно изъять какую-то часть из P_d, а именно 30 из 105. Следовательно, оптимальная акцизная ставка будет равна $t^* = \frac{30}{105} = \frac{2}{7}$.

Оптимальная ставка НДС: забираем 30 из 75, то есть $t^* = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$.

Точно также можно не только максимизировать налоги, но и получать конкретную сумму налоговых сборов. Для этого также находим соответствующую ставку потоварного налога, а далее выводим ставку интересующего нас налога из P_s и P_d в новой точке равновесия.

Хочу заметить, что эквивалентность работает **только** на рынке совершенной конкуренции, оптимизировать налоги в других рыночных структурах с помощью эквивалентности не выйдет.

Влияние на общественное благосостояние

Посмотрим на то, какие излишки и DWL образуются при введении процентных налогов. Рассмотрим график:

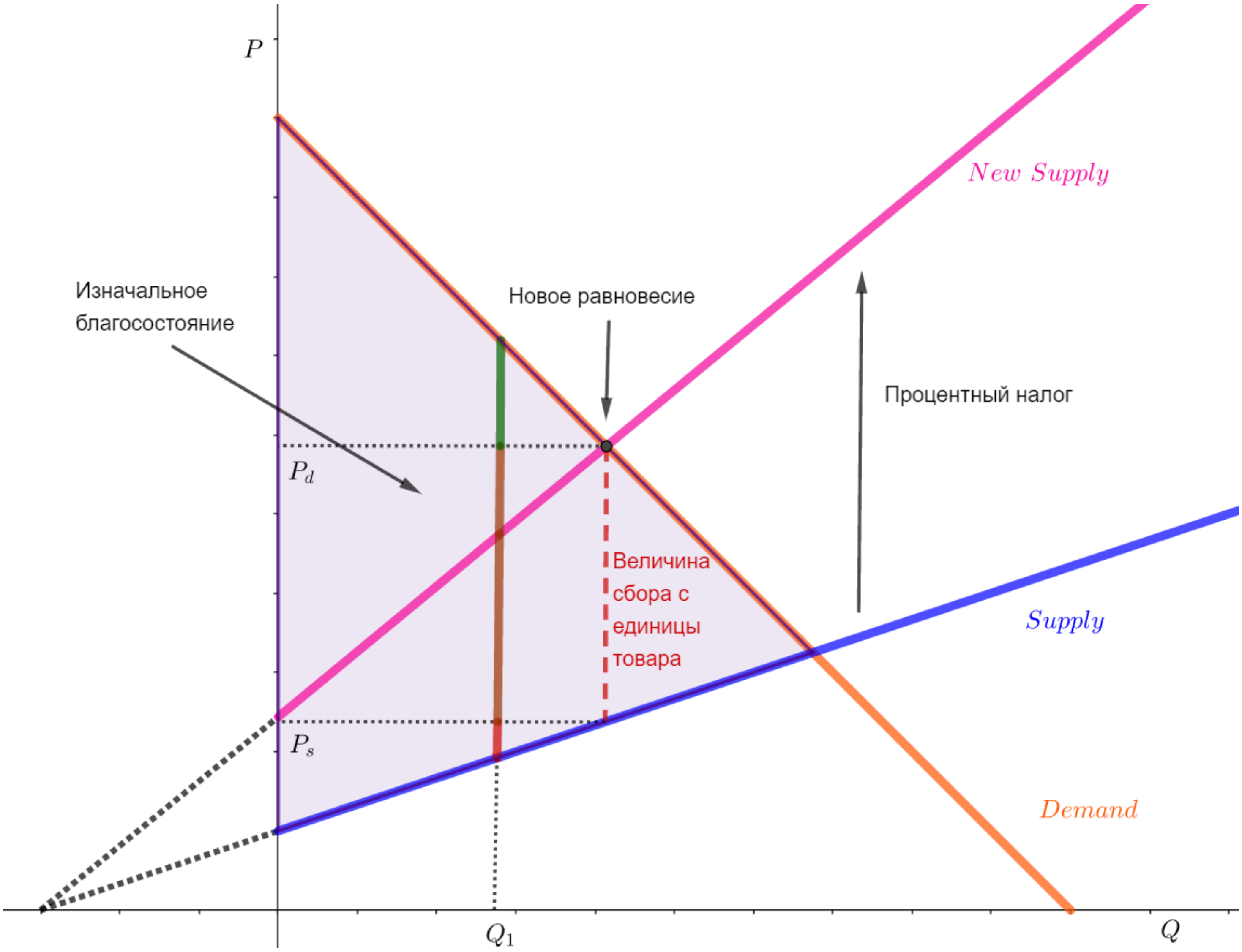


Рис. 83: Излишки с единицы товара при процентном налоге

Здесь будет показан еще один вариант расположения излишков на графике. С излишком потребителя опять все просто: он отмечен зеленым отрезком. Излишек производителя здесь отмечен красным отрезком и равен разнице между ценой производства товара, которое показывает значение изначального предложения, и ценой P_s, которую в итоге получит производитель за свой товар.

Излишек государства с единицы товара будет одинаков для каждой единицы (ведь они все продаются по одинаковой цене), и равен разнице между P_d и P_s в точке равновесия. На графике излишек государства отмечен коричневым отрезком.

Теперь мы суммируем отрезки для всех торгуемых единиц товара и получаем площади излишков, а также потерю в суммарном благосостоянии:

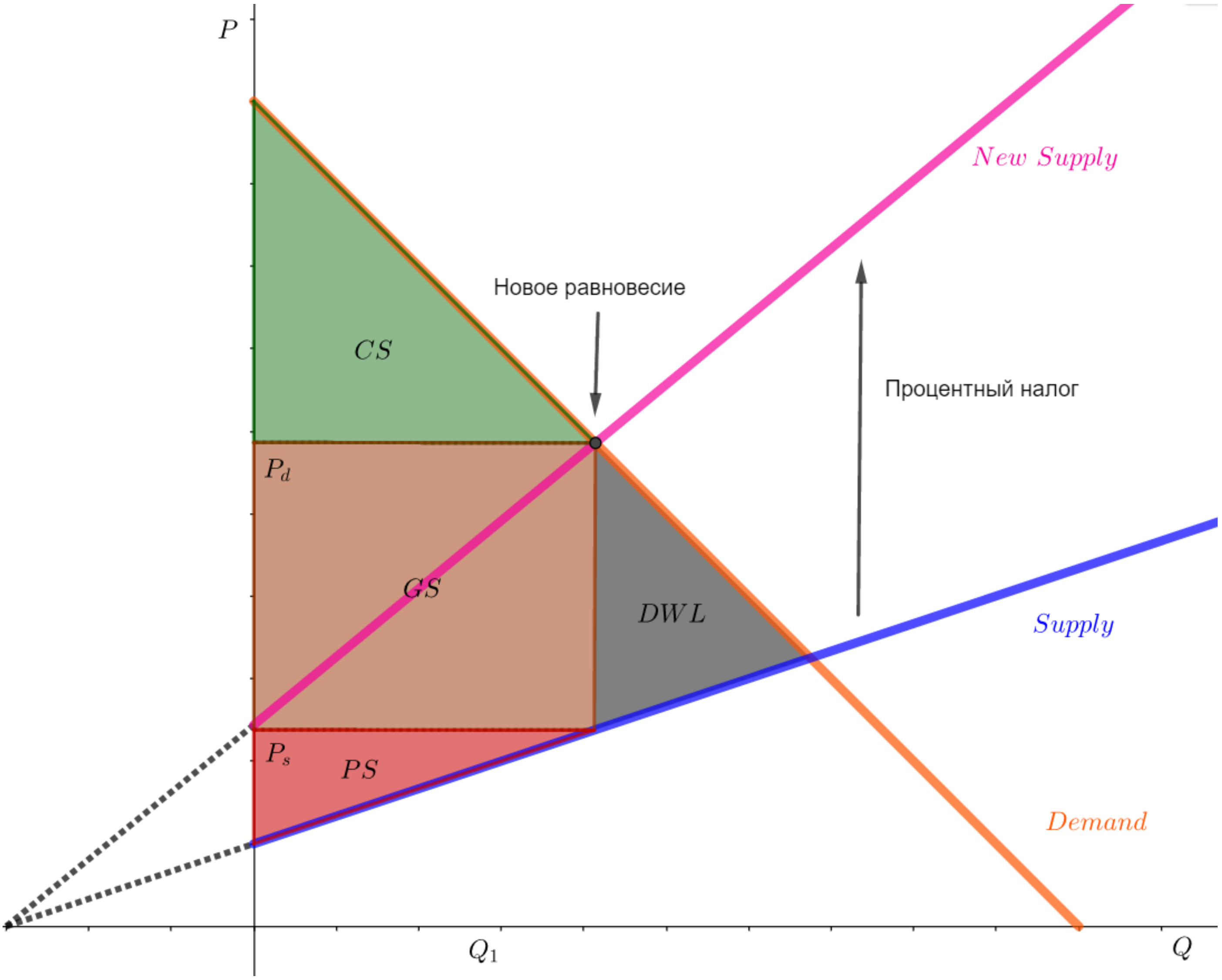


Рис. 84: Общественное благосостояние при процентном налоге

Таким образом, DWL будет точно таким же, как если бы мы попали в данную точку с помощью потоварного налога.

Налоги и субсидии в международной торговле на рынках совершенной конкуренции

Задачи по налогам в международной торговле относятся к довольно сложным, так что их дают только на потоварные ставки, чтобы не усложнять итак довольно нагроможденные системы. Мы будем рассматривать именно экспортные и импортные пошлины.

Как обычно, международная торговля делится на торговлю малой и крупной страны.

Налоги в торговле малой страны

Малая страна отличается тем, что не может влиять на мировую цену товара и воспринимает ее как заданную. В случае, когда страна является импортером, на нее не будет действовать экспортная пошлина и наоборот.

Рассмотрим ситуацию, в которой страна-экспортер облагает своих производителей экспортной пошлиной, на примере задаче.

Допустим, спрос, предложение и мировая цена выглядят следующим образом:

$$Q_d = 180 - P$$

$$Q_s = P - 60$$

$$P_w = 150$$

Найдем цену автаркии:

$$Q_d = Q_s$$

$$180 - P = P - 60$$

$$P = 120$$

Цена внутри страны ниже, чем на мировом рынке, следовательно, страна действительно будет экспортировать товар.

В случае введения экспортной пошлины на таком рынке производители, которые изначально экспортировали товар по цене P_w, теперь получают по факту $P_w - t$. Таким образом, можно представить, что мировая цена просто сместилась вниз на t и далее решать задачу используя эту цену. Таким образом, цена в стране уже будет отличаться от мировой цены: производители будут продавать товар таким образом, чтобы получать одинаковую цену и с внутренних и с внешних продаж, то есть установят внутри цену $P_w - t$.

Например, можно найти ставку экспортной пошлины, максимизирующую налоговые сборы. Для этого найдем объем экспорта при введении налога:

$$Ex = Q_s - Q_d = P - 60 - 180 + P = 2P - 240 = 2(P_w - t) - 240 = 2(150 - t) - 240 = 60 - 2t$$

$$T = Ex * t = (60 - 2t)t = 60t - 2t^2 \xrightarrow{t} max$$

График - парабола ветвями вниз. Ищем вершину:

$$t^* = 15$$

Здесь я опустил участок $t > 30$, так как при введении такой пошлины цена экспорта $P_w - t$ будет ниже равновесной и экспорт прекратится.

Посмотрим на то, как это выглядит на графике, и как влияет на общественное благосостояние:

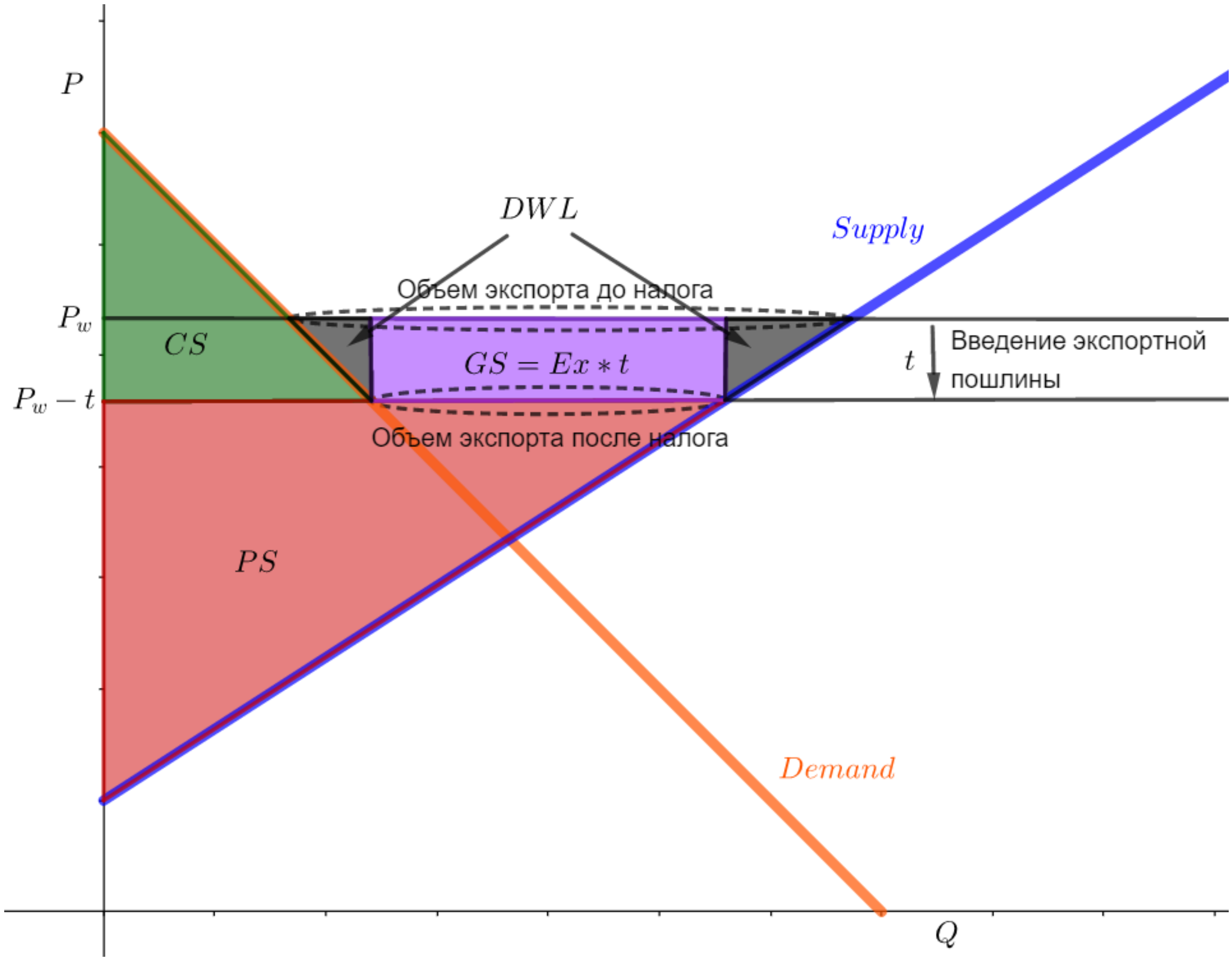


Рис. 85: Экспортная пошлина в малой экономике

Соответственно, в случае импорта и ипортной пошлине будет то же самое (и точно также будет возникать DWL).

Налоги в торговле крупных стран

Торговля крупных стран отличается тем, что они могут влиять на мировую цену товара. Таким образом, экспортные и импортные пошлины также могут повлиять на их поведение, и, соответственно, на мировую цену.

Рассмотрим две страны, торгующие друг с другом:

A	B
$Q_d = 90 - P_a$	$Q_d = 150 - P_b$
$Q_s = P_a$	$Q_s = P_b - 30$

Сначала найдем, какая из стран будет экспортером, а какая - импортером:

$$90 - P_a = P_a$$

$$P_a = 45$$

$$150 - P_b = P_b - 30$$

$$P_b = 90$$

$P_a < P_b$, следовательно, A - экспортер, а B - импортер.

Теперь рассмотрим, что произойдет, если страна A введет экспортную пошлину. Экспортной пошлиной облагаются все экспортные товары, следовательно, ее можно вводить только на функцию экспорта (такая пошлина меняет цену экспорта). Найдем функции экспорта страны A и импорта страны B (не забываем, что у нас есть участки, на которых спрос или предложения становятся равны 0):

$$Ex_a = Q_s - Q_d = \begin{cases} 2P - 90 & P \leqslant 90 \\ P & P > 90 \end{cases}$$

$$Im_b = Q_d - Q_s = \begin{cases} 180 - 2P & P \geqslant 30 \\ 150 - P & P < 30 \end{cases}$$

По сути, экспорт и импорт являются соответственно предложением и спросом на мировом рынке. В таком случае введение экспортной пошлины будет по сути являться введение потоварного налога на таком рынке. Давайте изобразим это на графике:

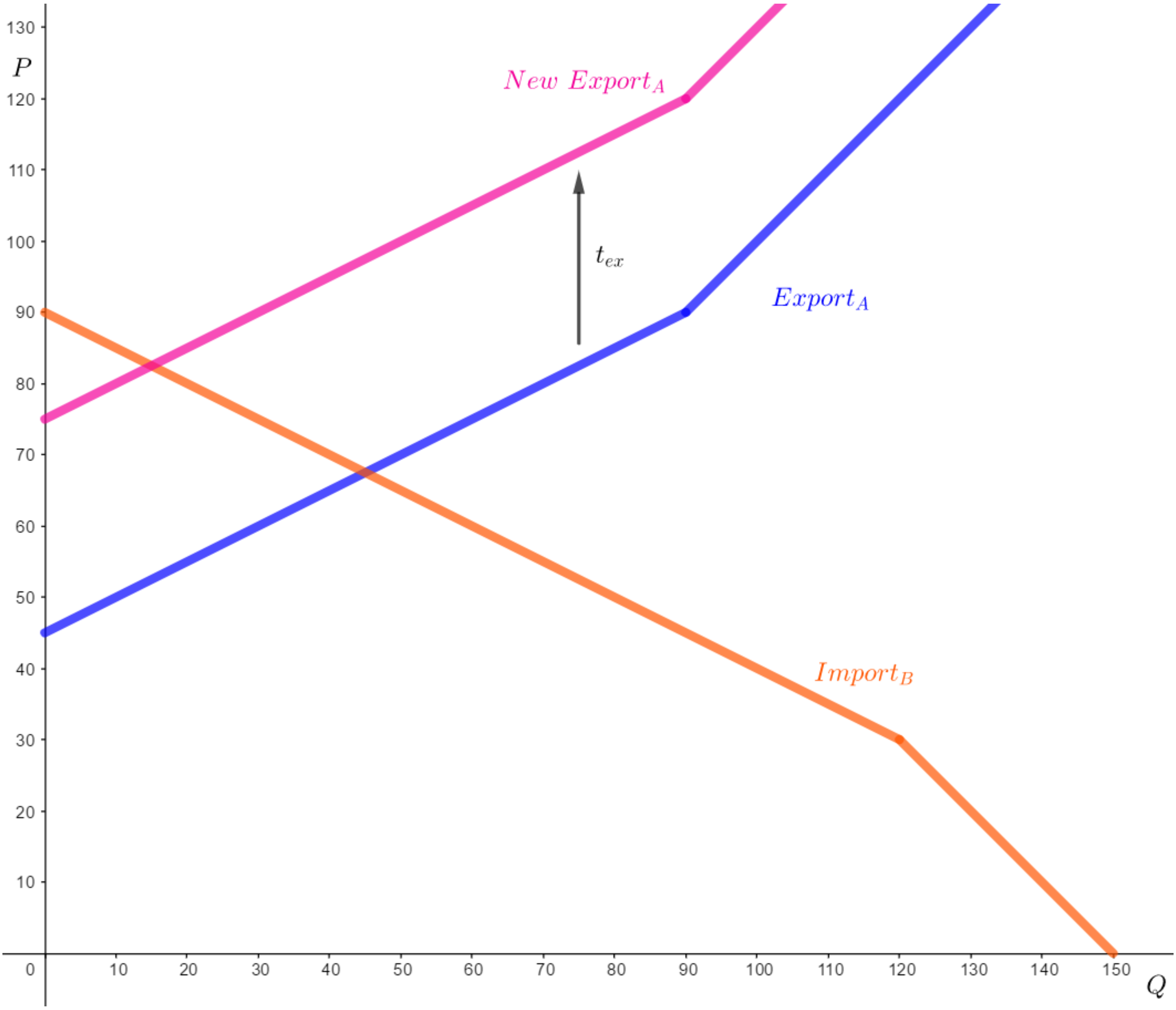


Рис. 86: Экспортная пошлина в торговле крупных стран

Соответственно, далее можно решать задачу точно также, как и задачу с потоварным налогом внутри страны.

Найдем новое равновесие при введении какой-либо ставки экспортной пошлины t_{ex} (Заметим, что пересечение идет на верхних участках функция экспорта и импорта):

$$2(P - t_{ex}) - 90 = 180 - 2P$$
$$4P - 2t_{ex} = 270$$
$$P = \frac{135}{2} + \frac{t}{2}$$

Таким образом, мы нашли реакцию мировой цены на введение страной А экспортной пошлины. Заметьте, что в стране А установится цена, ниже мировой на величину налога, то есть $P_a = \frac{135}{2} + \frac{t}{2} - t = \frac{135}{2} - \frac{t}{2}$.

Самый интересный факт состоит в том, что цена внутри страны уменьшается на величину, меньшую, чем ставка налога (в данном случае при введении пошлины t_{ex} цена уменьшается только на $\frac{t_{ex}}{2}$) (в случае малой страны, вспомним, цена внутри страны уменьшается ровно на величину налога). Из-за этого оказывается, что крупная страна, имеющая влияние на мировую цену, может увеличить свое благосостояние путем введения пошлины на торговлю (то же самое может сделать страна-импортер с помощью импортной пошлины). Для иллюстрации нам опять потребуется график с излишками, описывающий одну страну. Я покажу соответствующие изменения на примере страны А и вводимой ей экспортной пошлины. Заметим, что без налога цена на мировом рынке сложится на уровне $P_w = \frac{135}{2}$:

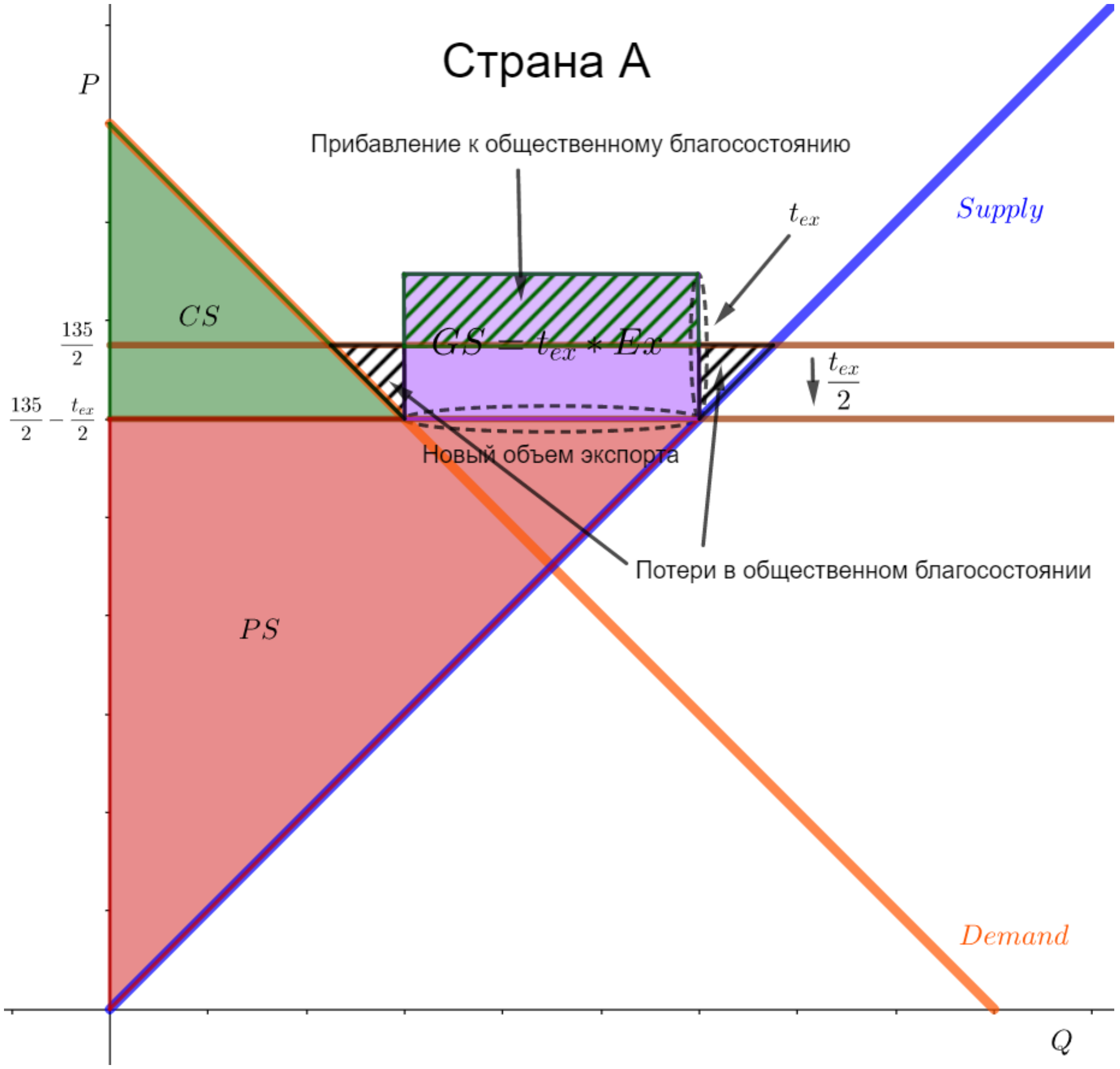


Рис. 87: Влияние экспортной пошлины на благосостояние страны

Здесь черные заштрихованные области - это потери благосостояния в результате введения пошлины. Однако, зеленая заштрихованная область - это прибавление в площади засчет того, что цена упала на величину, меньшую, чем ставка налога. Если сравнить эти площади, то видно, что итоговое благосостояние выросло в результате введения пошлины.

Натуральный налог

Задачи на натуральный налог всегда считались и считаются самыми сложными в олимпиадной экономике. Однако, если знать алгоритм их решения, оказывается, что не все так уж и печально. Сейчас мы с вами разберем, как именно следует решать такие задачи.

Натуральный налог - это налог, взымаемый не в денежных единицах, а в единицах товара.

Разберем, как натуральный налог влияет на рынок.

Влияние на оптимизацию фирмы

Влияние на оптимизацию фирмы - довольно простой случай натурального налога. Здесь нужно просто внимательно записать соотношение товара.

Например, если сказано, что государство требует себе половину от **проданного** количества товара, то в итоге нам необходимо произвести в **полтора** раза больше, чем требуется продать (Например, если будет продано 10 единиц, то 5 единиц нужно отдать государству, и в итоге придется произвести 15 единиц).

А если сказано, что отдать придется половину от **произведенного** количества, то произвести нужно будет уже в **два** раза больше, чем требуется продать (например, мы произвели 10 единиц, из них 5 отдали государству, а остальное продали).

Разберем пример задачи с натуральным налогом:

Монополист, имеющий функцию издержек $TC = Q^2$ работает на спросе $Q_d = 120 - P$ ($P = 120 - Q$). Государство вводит на него натуральный налог в виде 50% от проданного количества товара. Так как теперь произведенное количество ($Q_p - produced$) не равно проданному ($Q_s - sold$), выпишем прибыль фирмы, разделив эти два количества:

$$\Pi = TR - TC = P * Q_s - Q_p^2 = (120 - Q_s)Q_s - Q_p^2$$

Теперь нам осталось только записать соотношение между Q_s и Q_p. Сейчас произвести нам нужно в полтора раза больше, чем мы хотим продать. Тогда $Q_p = 1.5Q_s = \frac{3}{2}Q_s$. Подставим это соотношение в прибыль фирмы:

$$\Pi = 120Q_s - Q_s^2 - (\frac{3}{2}Q_s)^2 = 120Q_s - Q_s^2 - \frac{9}{4}Q_s^2 = 120Q_s - \frac{13}{4}Q_s^2 \xrightarrow{Q_s} max$$

Это парабола ветвями вниз. Ищем вершину:

$$Q_s^* = \frac{240}{13}$$

Следовательно, произвести нужно $Q_p = \frac{3}{2}Q_s = \frac{360}{13}$, а государство получит $Q_g = \frac{1}{2}Q_s = \frac{120}{13}$.

Влияние на рынок совершенной конкуренции

Теперь мы разберем, как натуральный налог может влиять на предложение и спрос (ведь он может собираться не только с производителей, но и с потребителей).

Допустим, спрос и предложения в стране описываются следующими функциями:

$$Q_s = 3P - 60$$

$$Q_d = 180 - 3P$$

Государство вводит 50% налог с покупок, а именно: половину от всего купленного товара потребители обязаны отдавать государству. Чтобы понять, как налог повлияет на рынок, нужно понять, как он изменит функцию спроса.

Есть два способа это сделать. Первый - это восстановить функцию полезности, из которой был получен данный спрос, и заново прооптимизировать ее, заменив количество $Q_c = \frac{Q_b}{2}$, где Q_c - это потребленное количество товара, а Q_b - купленное количество.

Проблема данного способа состоит в том, что одну и ту же функцию спроса могут задавать несколько функций полезности, и по сути этот способ не является правильным и тем более строгим. Что уж говорить о том, что восстанавливать функцию полезности из функции спроса довольно сложно.

Для начала поймем, что значит изначальная функция спроса $Q = 180 - 3P$. Она показывает зависимость количества товара, который мы хотим, чтобы **у нас по итогу оказался** от цены **которую мы по итогу заплатим за каждую оказавшуюся у нас по итогу единицу товара**. Обозначим их индексом 1, то есть $Q_1 = 180 - 3P_1$. Мы же должны получить новую функцию спроса, то есть зависимость товара, которое потребитель **хочет купить** в зависимости от цены **за единицу**

купленного товара. Эти цена и количество будут обозначаться индексом 2. То есть наша задача получить функцию $Q_2 = f(P_2)$. Это и будет новая функция спроса.

Итак, мы будем менять спрос в два этапа. Первоначально скажем, что цена, которую потребитель заплатит за единицу товара, которая у него по итогу останется (за Q_1), в 2 раза выше, чем цена единицы купленного товара (Q_2), так как чтобы в итоге обладать единицой товара, ему необходимо приобрести на рынке 2 единицы (так как одну он отдаст государству). То есть верно, что $P_1 = 2P_2$.

То же самое можно сказать про количество: у него останется ровно в 2 раза меньше товара, чем он купит, то есть $Q_1 = \frac{Q_2}{2}$.

Теперь просто подставим их в изначальную функцию спроса и получим изменившийся спрос, так как Q_2 и P_2 - это рыночные цена и количество товара:

$$Q_1 = 180 - 3P_1$$
$$\frac{Q_2}{2} = 180 - 3(2P_2)$$
$$Q_2 = 360 - 12P_2$$

Вот мы и получили итоговую функцию спроса на товар после введения налога. Теперь мы можем, например, пересечь ее с предложением и получить равновесные цену и количество:

$$360 - 12P = 3P - 60$$
$$P^* = 28$$
$$Q^* = 3P - 60 = 24$$

Другие налоги

Существуют также другие налоги, развернуто рассказывать про которые я не буду, а приведу лишь короткий список их особенностей.

Налог на прибыль

Налог на прибыль взымается в процентах от прибыли фирмы. Особенностью этого налога является то, что он **никак не влияет на оптимизацию фирмы**, так как максимизировать часть прибыли -то же самое, что максимизировать и целую прибыль.

Аккордный (паушальный) налог

Это разовый налог, то есть фиксированная сумма, один раз взымающаяся с фирмы. Обычно не влияет на оптимизацию, кроме того случая, при котором в результате введения налога фирма уходит с рынка.

Пол и потолок цен

Пол и потолок цен - отдельные виды вмешательства государства в экономику. В отличии от налогов и субсидий, при таком вмешательстве государство не имеет никаких излишков, а лишь регулирует рынок.

Пол цен - это такое число, **ниже** которого фирмы не имеют права назначать цену.

Потолок цен - это такое число, **выше** которого фирмы не имеют права назначать цену.

Если потолок цен вводится на уровне выше равновесной цены, он никак не влияет на рынок, ведь равновесная цена все еще может быть назначена фирмами. То же самое происходит при назначении пола цены ниже равновесного уровня.

Влияние на рынок совершенной конкуренции

Как обычно, мы рассмотрим один из двух симметричных вариантов. Посмотрим на то, как пол цен влияет на рынок совершенной конкуренции. Для этого проанализируем, как пол повлияет на спрос и предложение. Естественно, мы будем анализировать ситуацию, в которой пол цены вводится на уровне выше равновесной цены (иначе, он не окажет на рынок никакого влияния).

Рассмотрим следующий график, показывающий, как пол цены влияет на функции спроса и предложения:

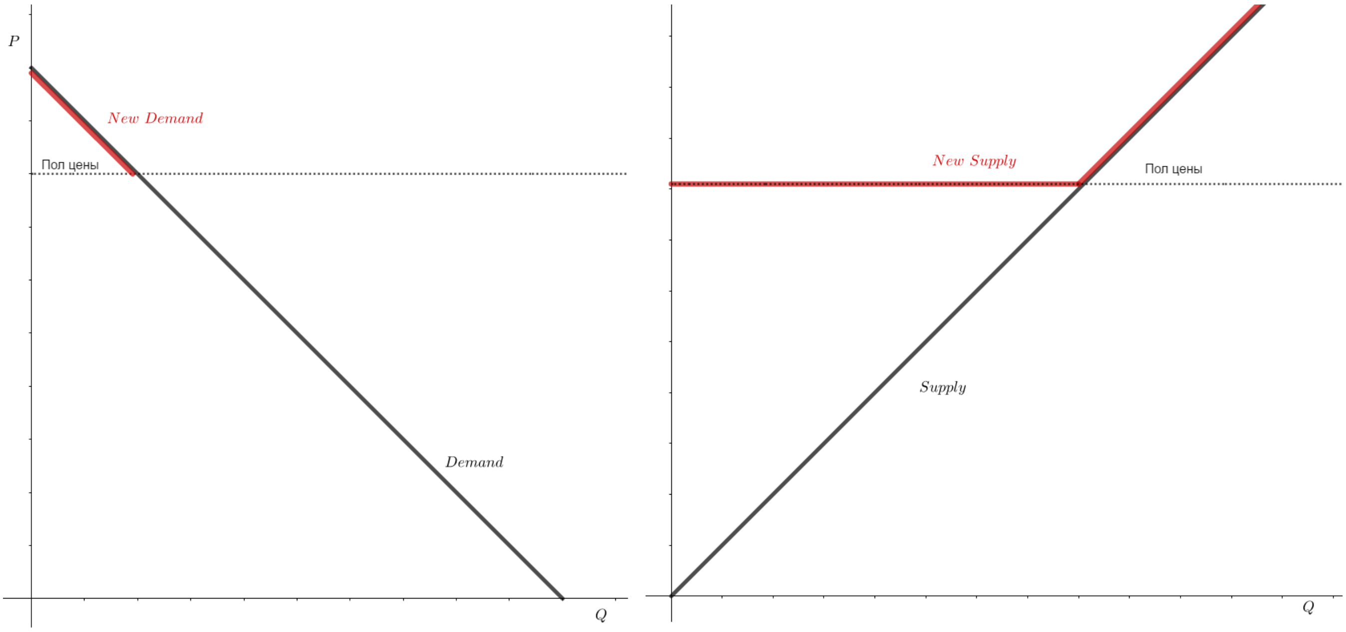


Рис. 88: Влияние пола цены на спрос и предложение

Как мы можем увидеть, спрос просто обрывается, когда доходит до пола цены: по более низкой цене покупать нельзя. Предложение же меняется немного другим образом. Теперь все единицы товара, которые фирма раньше готова была продавать подешевле, она продаст по цене пола.

Теперь пересечем получившиеся спрос и предложение и найдем равновесие:

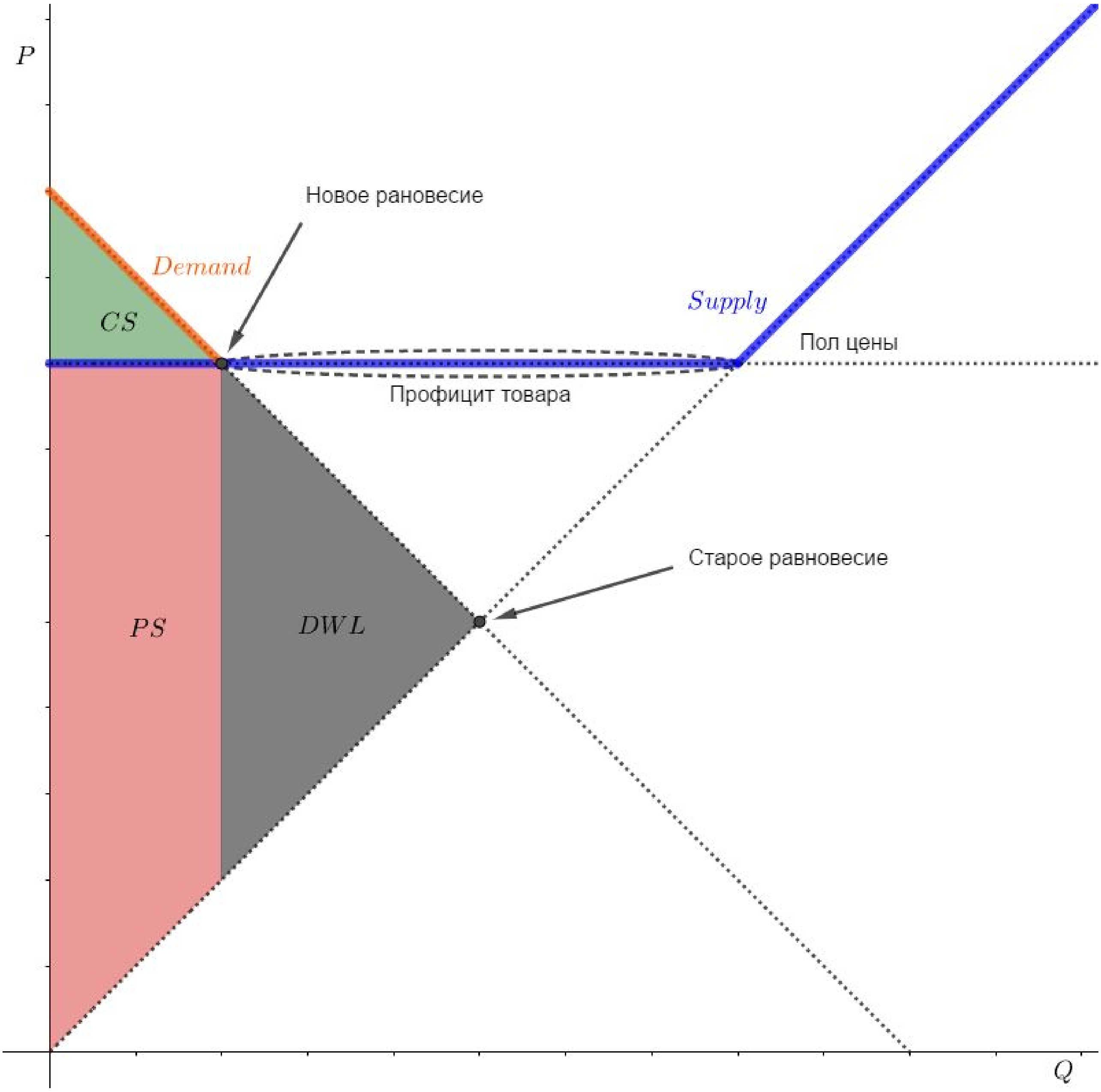


Рис. 89: Введение пола цены на рынок совершенной конкуренции

Здесь уже изображены излишки и DWL в результате такого вмешательства. Также вы можете заметить, что при данном поле цены производители готовы производить больше товара, чем готовы покупать потребители. Такую ситуацию на рынке называют профицитом товара. При введении пола цены на рынке совершенной конкуренции практически всегда равновесное количество уменьшается, а цена увеличивается (и становится равна установленному полу).

Соответственно, при потолке цены образуется дефицит товара, количество уменьшается, а цена становится равна установленному потолку:

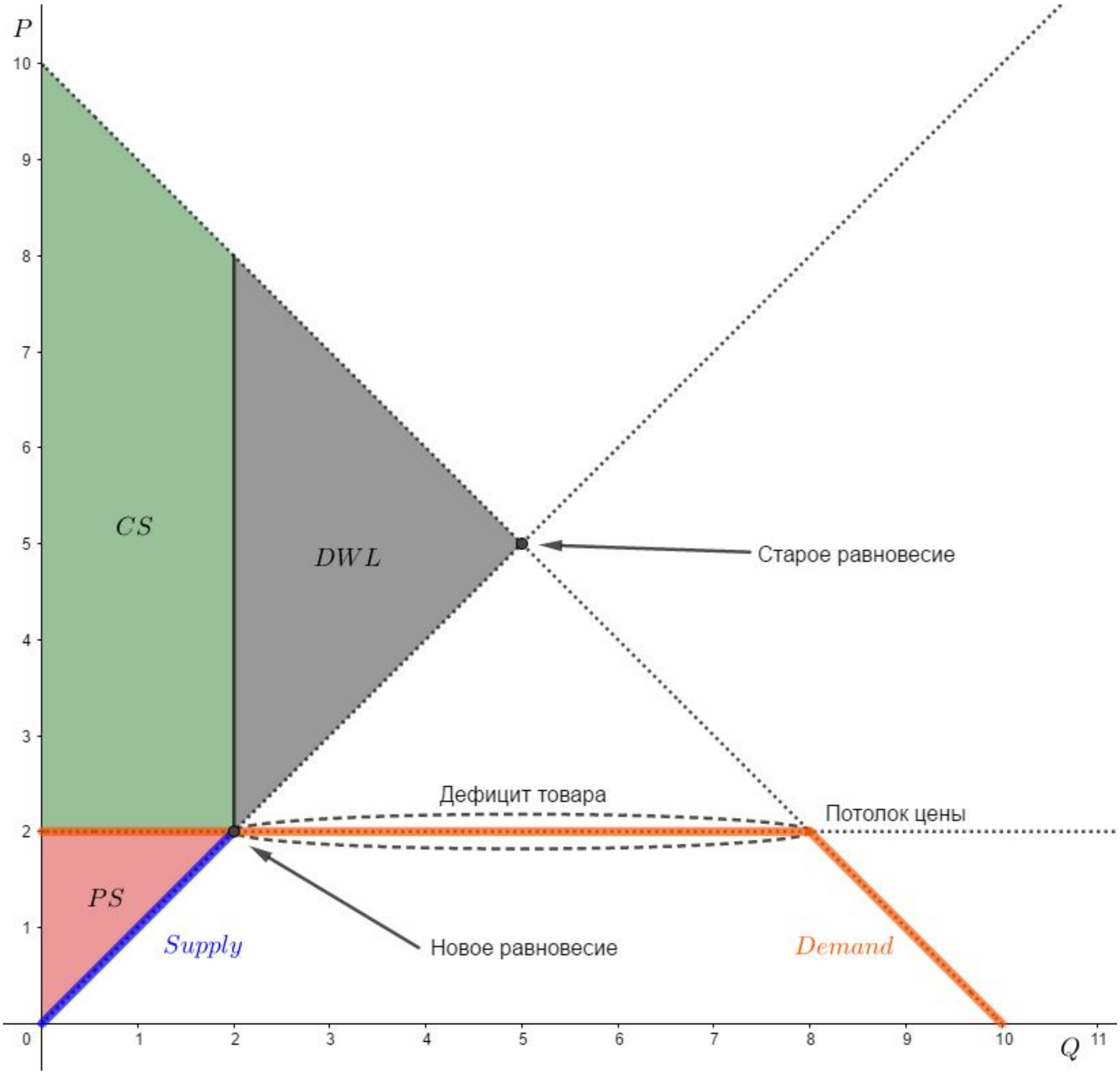


Рис. 90: Введение потолка цены на рынок совершенной конкуренции

Влияние на монополиста

Гораздо интереснее складывается ситуация с монополистом при введении потолка цены. Если ввести для монополиста пол цены выше равновесия, то все довольно просто: так как из-за этого «обрубается» спрос, то обрубается и MR. Более того, MR становится всегда выше MC монополиста, следовательно, монополист просто назначает максимальное количество товара, так как с каждого товара он получает положительную прибыль, а, значит, и цену, равную полу цены:

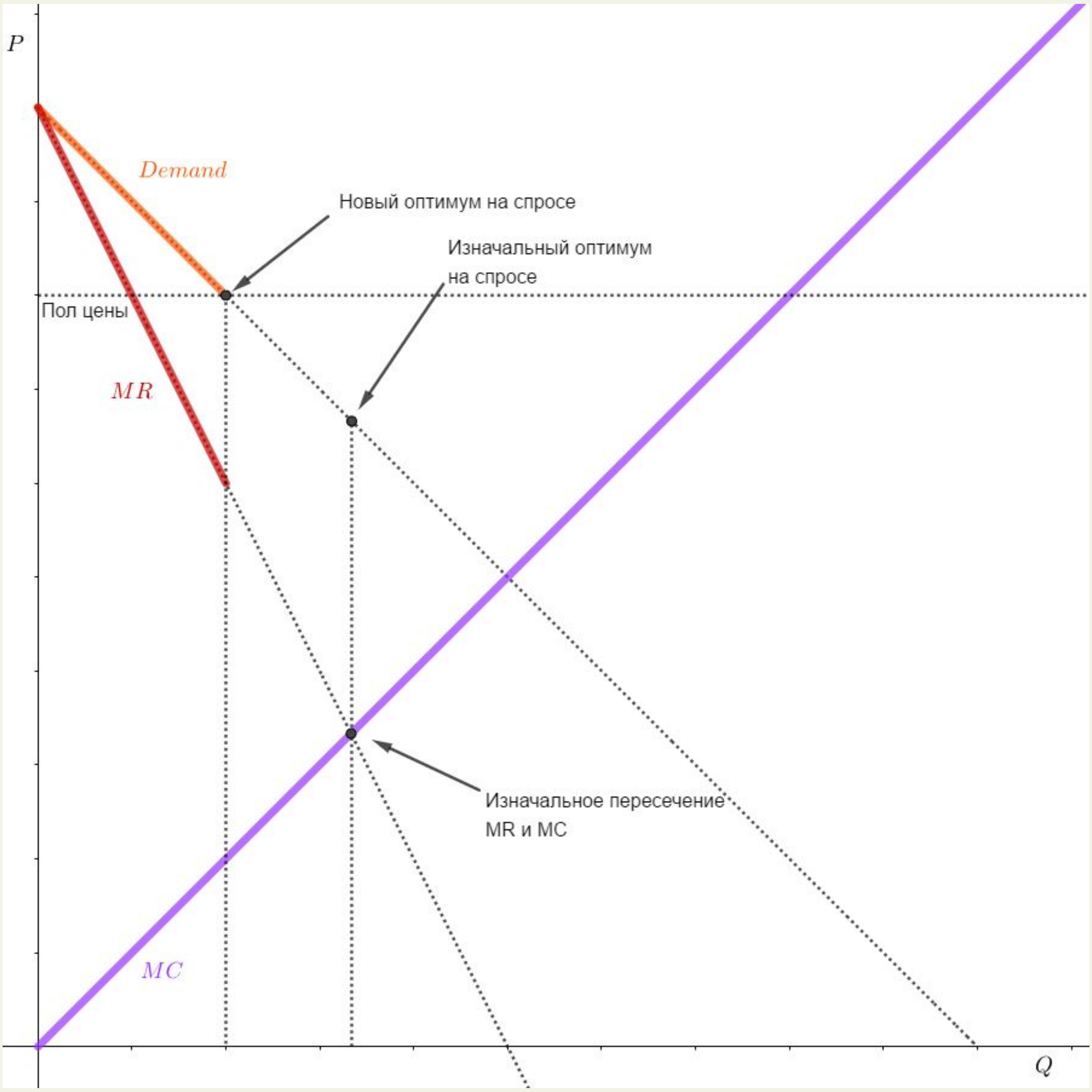


Рис. 91: Пол цены при монополии

А вот при потолке цены не все так однозначно. Из-за введения потолка цены спрос делится на два участка. Соответственно, функция MR тоже становится кусочной. На горизонтальном участке MR совпадает с функцией спроса (вспоминаем: MR показывает, на сколько увеличится выручка при продаже дополнительной единицы товара. На горизонтальном участке для того, чтобы продать дополнительную единицу не нужно снижать цену товара, следовательно, выручка при продаже дополнительной единицы увеличится ровно на цену этой единицы. Проще говоря, если $P = const$, то $MR = (TR)'_Q = (PQ)'_Q = P$). На втором же участке функция MR остается равна изначальной.

Посмотрите на графическую иллюстрацию функции MR при потолке цены:

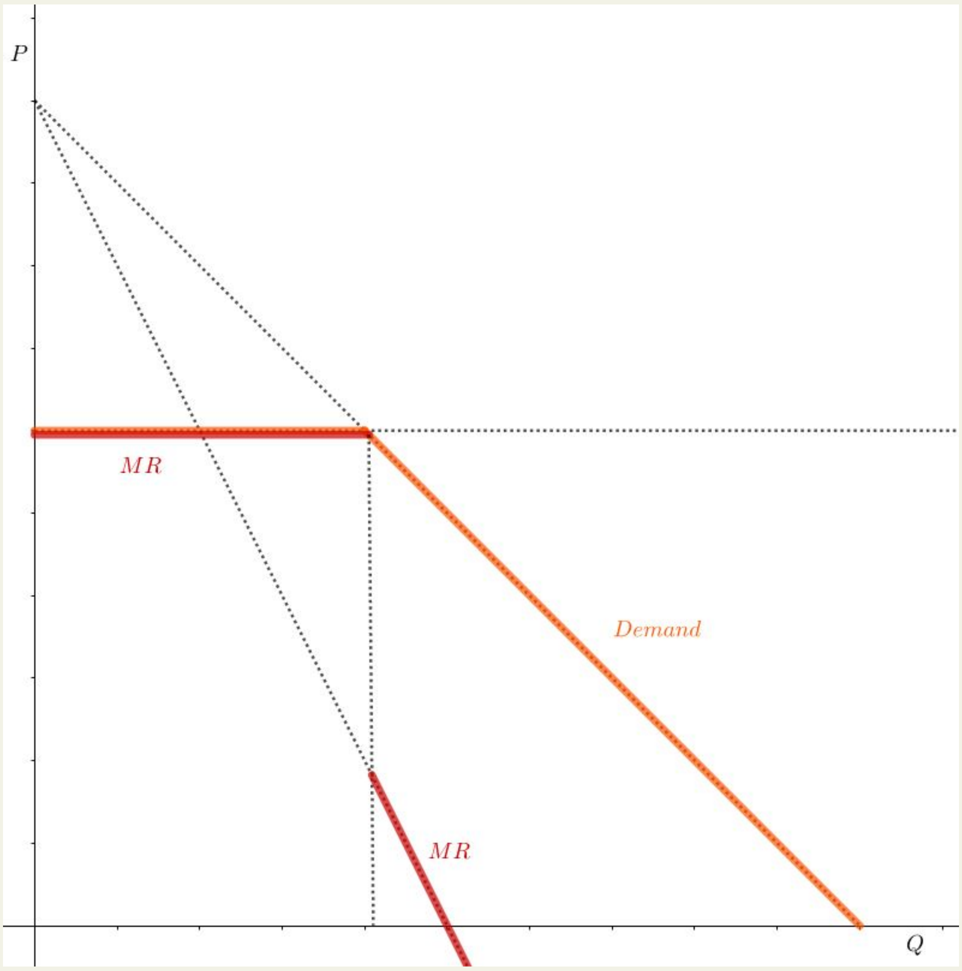


Рис. 92: MR при введении потолка цены

Теперь, при введении потолка цены на монополиста **ниже** цены, которую он хотел бы назначить, могут произойти две ситуации:

В первом случае потолок устанавливается ниже оптимальной цены монополиста, но выше пересечения MC со спросом. Нарисуем такую ситуацию и изобразим площади убытков и прибылей между MR и MC, как в обычном решении проблемы монополиста с помощью предельных функций:

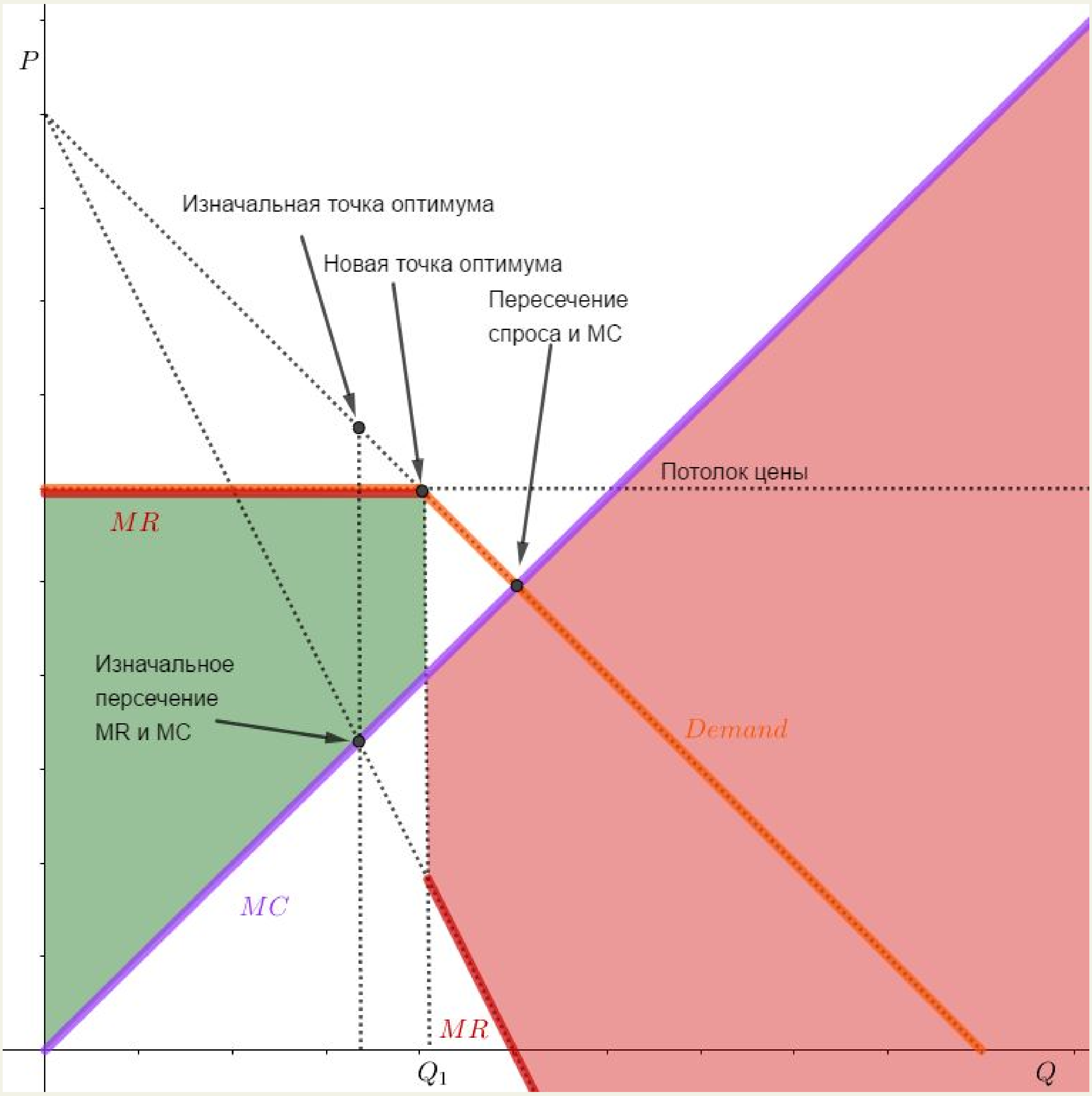


Рис. 93: Введение на монополиста потолка цен выше пересечения спроса и MC

Здесь мы видим, что Q_1 является оптимумом монополиста. Следовательно, из-за введения потолка цены монополист увеличил количество продаваемого товара, параллельно снизив цену до уровня установленного потолка! Более того, на рынке не возникает никакого дефицита товара, а общественное благосостояние повышается (я не буду его изображать из-за нагромождённости графиков, но вы попробуйте сравнить изначальное благосостояние и благосостояние после введения потолка. Оно должно увеличиться).

Однако, если установить потолок **ниже** точки пересечения MC и спроса, ситуация поменяется:

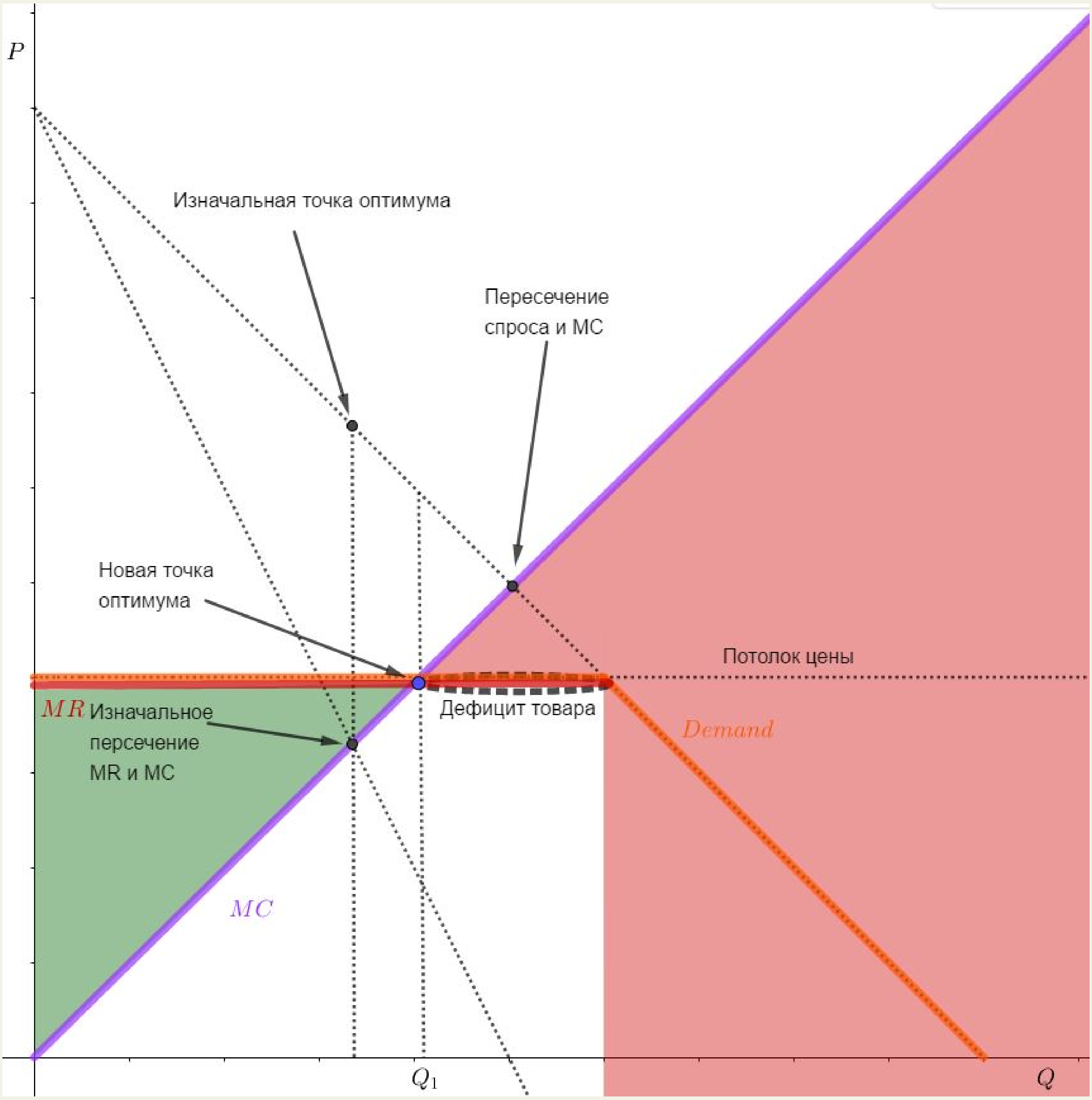


Рис. 94: Введение на монополиста потолка цен ниже пересечения спроса и MC

В таком случае MR и MC уже пересекаются. Как раз в точке их пересечения фирма перестает получать прибыль, и дальше идет убыток (заметьте, что после окончания горизонтального участка спроса MR резко становится отрицательным). Теперь точка равновесия оказывается не на изначальной функции спроса, а под ней (на MC). Получается, что при данном потолке цены продавать готовы больше, чем покупать. Следовательно, в таком случае на рынке возникает дефицит товара.

Далее, при снижении потолка цены, точка оптимума будет двигаться по MC вниз. В этом случае общественное благосостояние будет уменьшаться.

В общем виде, при снижении потолка цены, монополист сначала увеличивает объем товара, а затем уменьшает его. Посмотрите на то, как двигается оптимальная точка монополиста при снижении потолка цены:

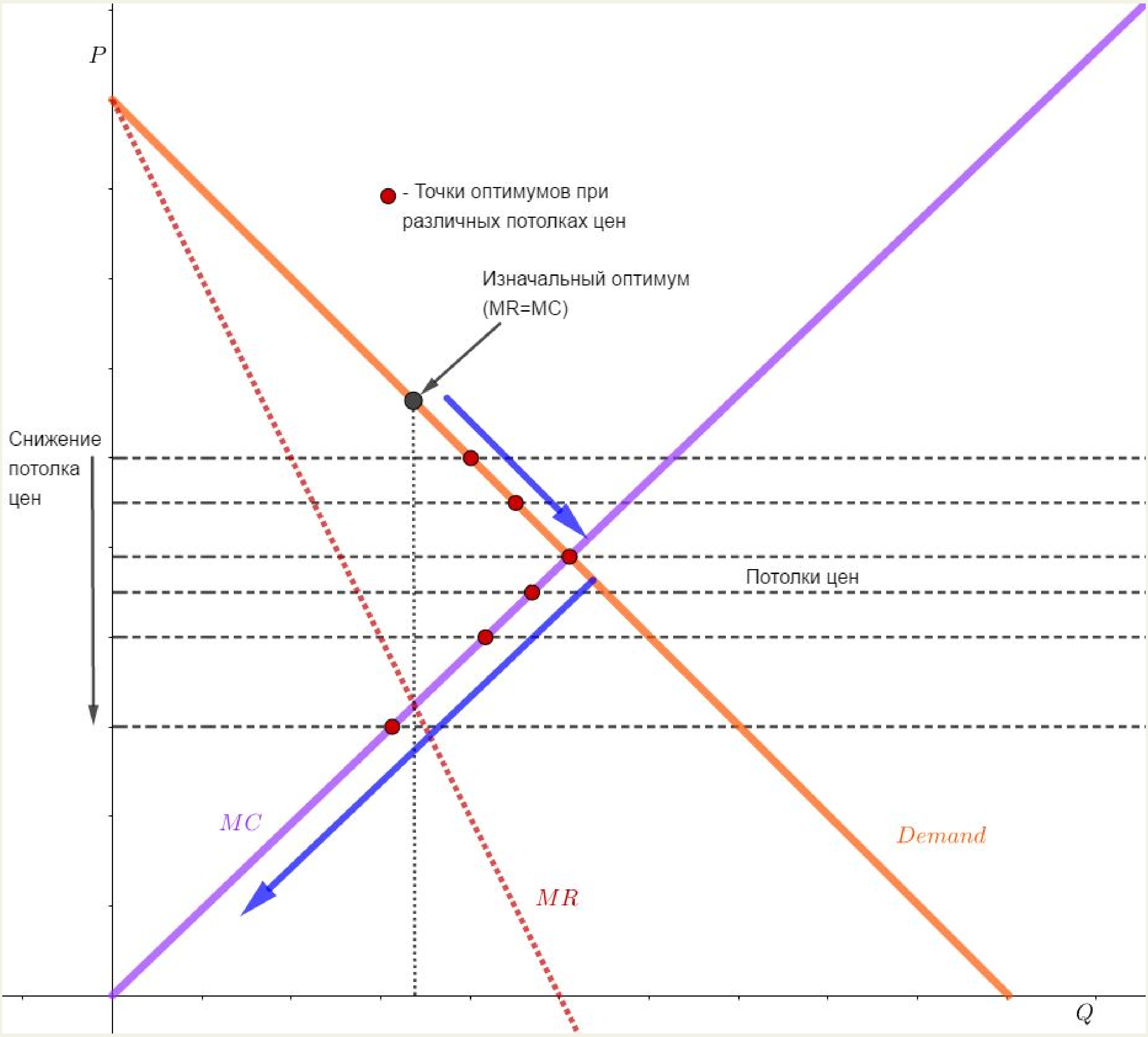


Рис. 95: Движение точки оптимума по мере снижения потолка цены

Если бы фирма, которую мы рассматриваем, вела бы себя как совершенный конкурент, то ее функция предложения совпала бы с ее функцией MC (почему это так смотрите в оптимизации совершенного конкурента). Следовательно, при совершенной конкуренции равновесие сложилось бы ровно в точке пересечения данного MC и спроса. Однако, точно такое же равновесие сложится, если государство введет потолок цены на уровне пересечения спроса и MC. Получается, если будет введен такой потолок, то на на монополистическом рынке может быть достигнут уровень совершенной конкуренции!

В реальной практике пол цены практически всегда устанавливается на товары, потребление которых государство стремится ограничить. Например, в России пол цены введен на некоторые виды алкоголя. Потолок же цены вводится с целью сделать доступными для населения некоторые категории товаров. например, в России потолок цен введен на многие жизненно необходимые лекарства.

Квоты

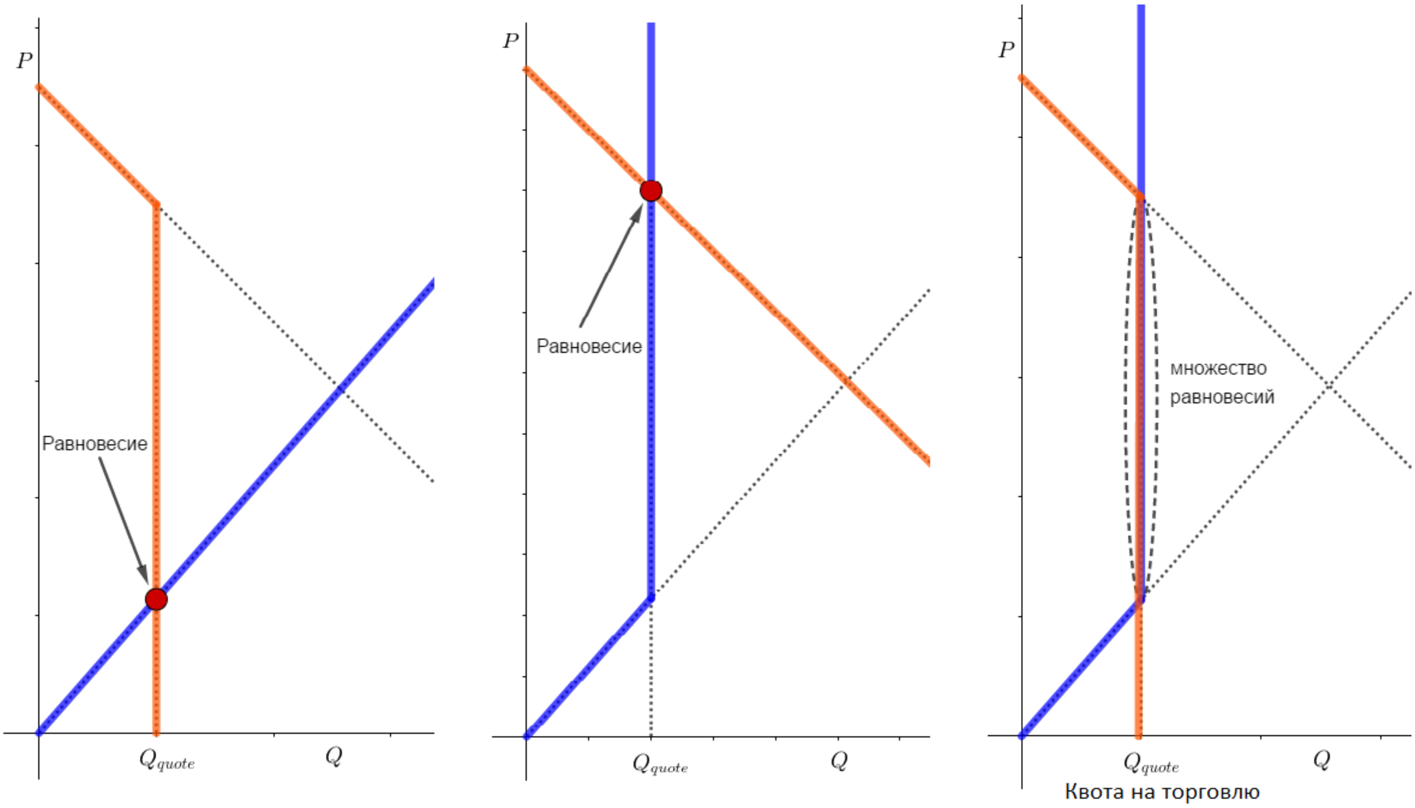
Квоты - еще один вид государственного вмешательства, при котором у него не образуется никакого излишка.

Квота - ограничение на максимальное количество товара, доступное для торговли. В плане квот очень важно, на кого они вводятся, то есть какую именно функцию они изменят.

Влияние на рыночные структуры

Совершенная конкуренция

Введение квоты всегда «обрубает» функцию спроса (если введена квота на покупку) или предложения (если введена квота на продажу). Может быть введена квота сразу на всю торговлю, и в таком случае возможны множественные равновесия, так как полученные в результате введения квоты спрос и предложение будут пересекаться на целом отрезке. Ниже приведена графическая иллюстрация этих случаев и равновесий, которые получаются в итоге:



Квота на покупку
(Изменяется спрос)

Квота на продажу
(Изменяется предложение)

Квота на торговлю
(Изменяется и спрос и предложение)

Рис. 96: Варианты введения квоты на рынке совершенной конкуренции

Как вы можете заметить, в каждом случае равновесное количество равно вводимой квоте. Если квота вводится на уровне выше равновесного количества товара, то она никак не повлияет на рынок.

Остальные структуры

Вне зависимости от того, какого типа квота введена, фирмы, имеющие рыночную власть (например, монополист или олигополисты), будут просто работать на «обрубленной» функции спроса. Дальнейшая оптимизация сводится к максимизации с ограничениями.

В качестве примера рассмотрим монополиста с функцией издержек $TC = 20Q$, работающего на спросе $Q_d = 80 - P$, и на которого вводится квота на торговлю в размере $Q_{quote} = 20$.

Сначала найдем оптимум без квоты:

$$\Pi = PQ - TC = (80 - Q)Q - 20Q = 60Q - Q^2 \xrightarrow{Q} max$$

График - парабола ветвями вниз. Ищем вершину:

$$Q^* = 30$$

Так как $Q^* > Q_{quote}$, то монополист уже не может продать 30 единиц. Однако, он будет брать близжайшее доступное к вершине количество, а это $Q = 20$. Тогда он установит $P = 80 - Q = 60$.

Квоты в международной торговле

Обычно задачи на квоты встречаются по отношению к экспорту или импорту товара (экспортные и импортные квоты). По сути, они ничем не отличаются от квот на обычном рынке, только вводятся на функции экспорта и импорта. Точно также, как экспортные и импортные пошлины похожи на обычный потоварный налог. То есть экспортная пошлина будет «обрубать» фукнцию экспорта, а импортная - функцию импорта.

Косвенное государственное вмешательство

При косвенном вмешательстве в экономику государство не говорит фирмам что делать, какие цены и количества назначать и так далее, а ведет себя как один из участников рынка. В таких случаях считается, что государство ведет себя как совершенный конкурент: воспринимает рыночную цену как заданную.

Существует множество варинтов того, как государство может закупать или продавать товары на рынок. Мы рассмотрим один из них, чтобы вы поняли принцип.

Рассмотрим следующий рынок совершенной конкуренции:

$$Q_d = 100 - P$$

$$Q_s = P$$

Государство планирует поддержать производителя, объявив, что потратит 2500 д.е. на закупку товара. Таким образом, государство будет предъявлять дополнительный спрос.

Найти его довольно просто: если государство фиксирует количество денег, которое оно должно потратить, то должно быть выполнено равенство $Q_g * P = 2500$, где Q_g - количество товара, которое приобретет государство. Следовательно, спрос государства будет выглядеть как $Q_g = \frac{2500}{P}$.

Теперь нам нужно найти суммарный спрос. Вспоминаем, что при $P \geqslant 100$ изначальный спрос равен 0, и выводим суммарную функцию:

$$Q_d = \begin{cases} \frac{2500}{P} & P \geqslant 100 \\ 100 - P + \frac{2500}{P} & P < 100 \end{cases}$$

Осталось приравнять спрос к предложению и найти равновесие. Так как функция спроса убывающая, а предложения - возрастающая, равновесие должно быть только одно. Попробуем пересечь сначала с верхней функцией:

$$P = \frac{2500}{P}$$

$$P = 50$$

Не угадали, так как $P = 50$ не подходит под ограничение участка спроса. Значит, пересечение на другом участке:

$$100 - P + \frac{2500}{P} = P$$

$$P^* = 25 + 25\sqrt{3}$$

Таким образом, мы нашли, как повлияет на рынок косвенное вмешательство государства.

Внешние эффекты

Внешние эффекты (они же – экстерналии, от слова *External*) – эффекты от производства или потребления товара, которые не учитываются на рынке данного товара, однако учитываются в общественном благосостоянии. Внешние эффекты бывают положительными и отрицательными. Например, производство тяжелых сплавов негативно сказывается на экологии и от этого страдают люди в промышленных городах, а использование прививок несет положительный внешний эффект: люди не только сами меньше болеют (это внутренний эффект применения прививки), но и меньше заражают других людей (это внешний эффект).

Внешние эффекты являются одним из провалов рынка (несовершенством рыночной экономики), так что регулирование внешних эффектов в основном ложиться на государство. Его задача простая: увеличивать выпуски и потребление товаров, имеющих положительный внешний эффект, и снижать для товаров, имеющих негативный внешний эффект. Снижать выпуск государство может с помощью налогов, ограничений количества и цены. Повышать выпуск можно с помощью субсидий или регулирования цены (например, потолок цены на монополиста может увеличить его выпуск, что было описано немного выше).

Далее мы посмотрим на более конкретные примеры и задачи на внешние эффекты, описывающие их проблемы, а также то, как госдуарство будет на них регировать. Обязательно изучите все графические иллюстрации.

Внешние эффекты в совершенной конкуренции

Рассмотрим пример негативного внешнего эффекта на рынке совершенной конкуренции. Представим себе рынок стали, спрос и предложение на котором имеют вид $Q_d = 120 - P$, $Q_s = 2P - 60$. Производство стали связано с вредными выбросами в атмосферу, которые ухудшают экологию и вредят здоровью населения региона, производящего сталь. Общие убытки населения от выбросов можно описать функцией $EC = \frac{Q^2}{2}$, где EC – общий размер негативного внешнего эффекта или же просто внешние издержки (*External Costs*), а Q – объем прозведенной стали.

В случае возникновения любого внешнего эффекта оказывается, что совершенно конкурентное равновесие перестает быть общественно оптимальным, ведь ни покупатели, ни производители стали не берут в расчет данные внешние издержки. Получается, что они создают DWL – потери мертвого груза экономики от внешнего эффекта. Нашей задачей будет найти, какие именно потери создает данный внешний эффект, каким на самом деле будет оптимальтный выпуск (Q_{SW}), дающий максимальное благосостояние, и как государство может добиться данного уровня с помощью вмешательства на этот рынок.

Замечу, что при наличии отрицательного внешнего эффекта оптимальный выпуск должен быть ниже совершенно конкурентного, а при наличии положительного внешнего эффекта – выше. При отсутствии внешнего эффекта совершенно конкурентный выпуск всегда будет самым оптимальным с точки зрения общества в целом.

Сразу рассчитаем совершенно конкурентное равновесие с помощью пересечения спрос и предложения:

$$120 - P = 2P - 60$$

$$P^* = 60,\ Q^* = 60$$

Можем изобразить данное равновесие на графике, обозначив излишки покупателя и производителя:

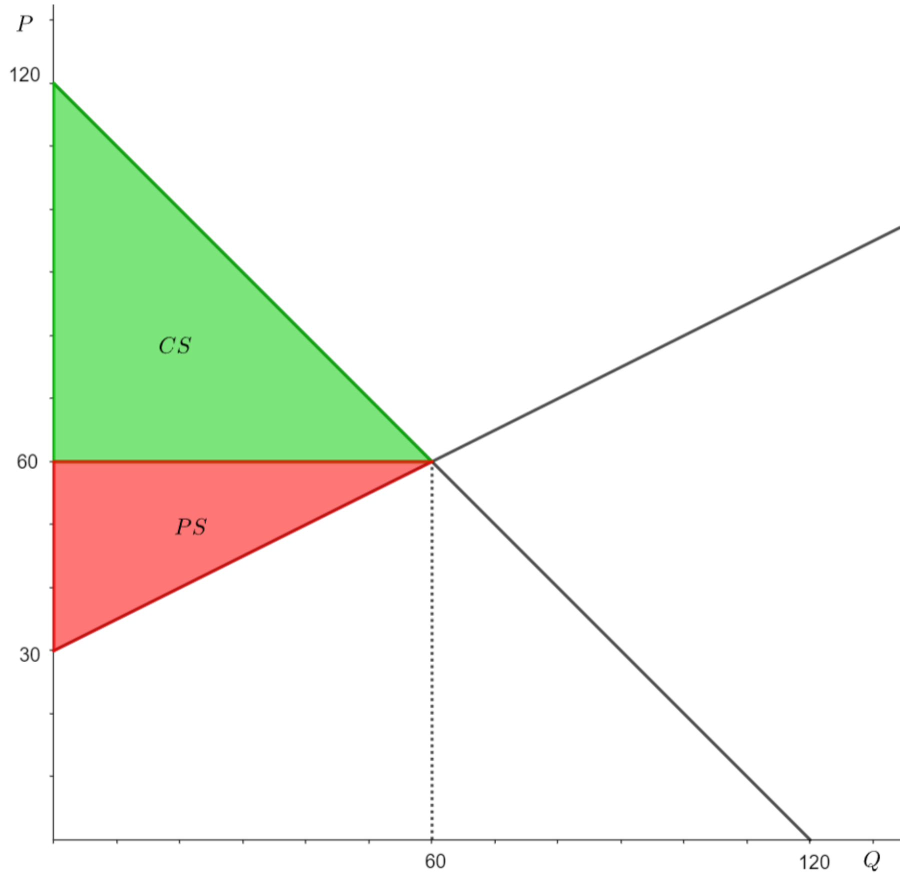


Рис. 97: Равновесие на рынке с излишками

Прямое решение внешних эффектов

Для начала рассчитаем размер негативного внешнего эффекта:

$$EC = \frac{Q^2}{2} = \frac{60^2}{2} = 1800$$

Однако заметьте, чтобы размер внешнего эффекта не равен DWL: ведь DWL показывает, на сколько благосостояние на рынке ниже оптимального, то есть того, которое было бы, если бы внешний эффект был бы учтен. Давайте для начала еще рассчитаем размер всех излишков (CS и PS) и текущее благосостояние (SW) с учетом внешних затрат (EC). Излишки я буду считать по формуле треугольника:

$$CS = \frac{60 \cdot 60}{2} = 1800$$

$$PS = \frac{30 \cdot 60}{2} = 900$$

$$SW = CS + PS - EC = 1800 + 900 - 1800 = 900$$

Хочу обратить ваше внимание на еще один способ подсчета общественного благосостояния на рынке, который довольно удобно использовать в теме внешних эффектов. Благосостояние рынка можно не разбивать на отдельные излишки (потребителя, производителя или государства), так как перераспределение денег не имеет роли для общественного благосостояния. Например, не важно, по какой цене продается товар: важно лишь то, был он произведен или не был, то есть принес ли он пользу и были ли на него потрачены издержки. Из-за того, что спрос показывает, какую пользу приносит товар для покупателей, а предложение – какие издержки понесли производители, то можно обозначать благосостояние от каждого товара как просто вертикальную разницу между спросом и предложением. Сумму рыночных излишков мы будем называть рыночным благосостоянием (MS – $Market\ Surplus$), это общественное благосостояние без учета внешних эффектов. Так мы и поступим, чтобы рассчитать общее благосостояние на рынке при меньшем, чем равновесный, выпуске:

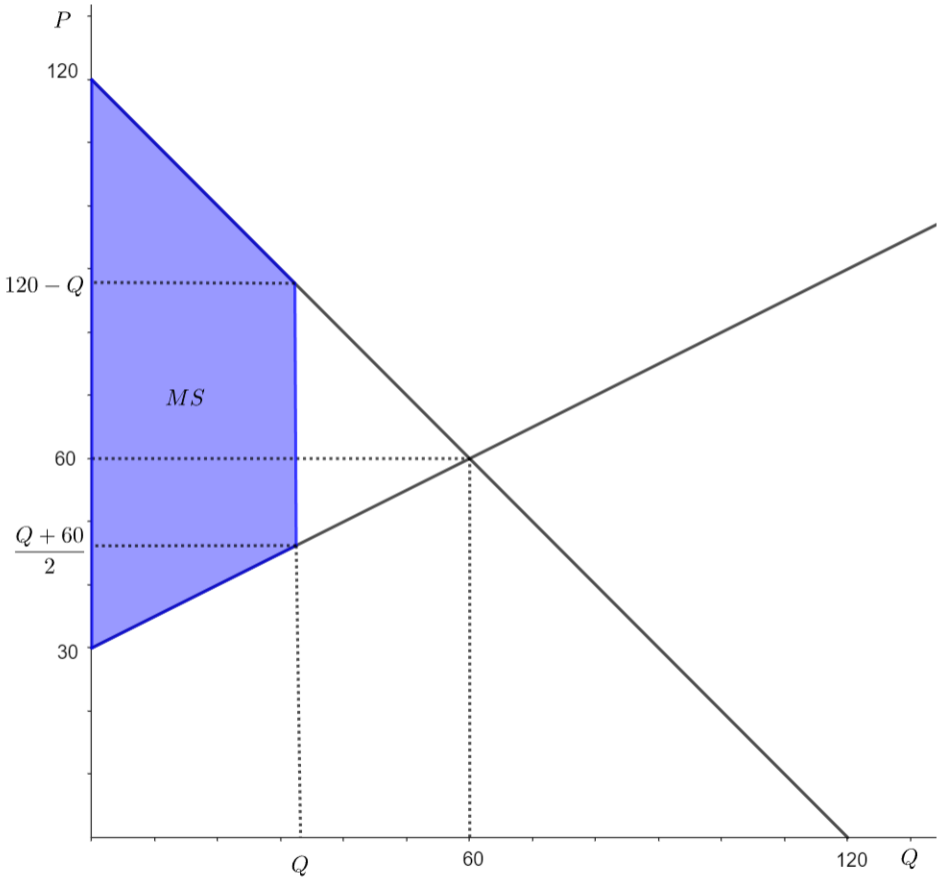


Рис. 98: Рыночное благосостояние

Здесь расчитаны точки на спросе и предложении, которые помогут нам в подсчете площади:

$$P_d = 120 - Q$$

$$P_s = \frac{Q + 60}{2}$$

Рассчитаем размер рыночного благосостояния в зависимости от объема выпуска. Я буду использовать формулу площади трапеции:

$$MS = \frac{((120 - 30) + (120 - Q - \frac{Q+60}{2}))}{2} \cdot Q = \frac{180 - \frac{3Q}{2}}{2} \cdot Q = \frac{360Q - 3Q^2}{4}$$

Убедимся в том, что при отсутствии внешних эффектов совершенно конкурентный выпуск (60) является общественно оптимальным:

$$SW = MS = \frac{360Q - 3Q^2}{4} \xrightarrow{Q} max$$

График – парабола ветвями вниз, максимум в вершине:

$$Q^* = \frac{360}{6} = 60$$

Что и требовалось доказать.

Теперь же рассчитаем оптимальный объем с учетом негативного внешнего эффекта:

$$SW = MS - EC = \frac{360Q - 3Q^2}{4} - \frac{Q^2}{2} = \frac{360Q - 5Q^2}{4} \xrightarrow{Q} max$$

График – парабола ветвями вниз, максимум в вершине:

$$Q_{SW} = \frac{360}{10} = 36$$

Теперь мы можем найти сам размер общественного благосостояния:

$$SW^* = \frac{360Q - 5Q^2}{4} = \frac{360 \cdot 36 - 5 \cdot 36^2}{4} = 1620$$

Таким образом, потери мертвого груза экономики от загрязнения воздуха составляют разницу межу оптимальным и совершенно конкурентным уровнем благосостояния:

$$DWL = SW^* - SW = 1620 - 900 = 720$$

Осталось ответить на последний вопрос: что может сделать государство для достижения общественно оптимального выпуска на данном рынке. Для этого рассчитаем цены потребителя и производителя в точке максимального общественного благосостояния:

$$P_d = 120 - Q = 120 - 36 = 84$$
$$P_s = \frac{Q + 60}{2} = \frac{36 + 60}{2} = 48$$

Государство может добиться данной ситуации простыми мерами: например, ввести квоту в размере $\overline{Q} = 36$ единиц товара, либо ввести пол цены на уровне $\underline{P} = 84$, либо потолок цены на уровне $\overline{P} = 48$. Однако интереснее будет ввести налог, который тоже приводит к снижению выпуска фирмой. Так как мы знаем P_d и P_s в оптимуме, то мы можем просто подставить их значения в формулы для трех использующихся в совершенной конкуренции налогов, чтобы найти их ставки, приводящие к максимальному общественному благосостоянию:

Потоварный налог:

$$P_d - P_s = t$$
$$t = 84 - 48$$
$$t^* = 36$$

Акцизный налог:

$$P_d - P_s = t \cdot P_d$$
$$84 - 48 = t \cdot 84$$
$$t^* = \frac{3}{7}$$

НДС:

$$P_d - P_s = t \cdot P_s$$
$$84 - 48 = t \cdot 48$$
$$t^* = \frac{3}{4}$$

Внешние эффекты с помощью предельных функций

Ответить на поставленные в данной задаче вопросы можно и по-другому: используя измененные рыночные графики. Давайте разбираться:

Цена спроса (P_d) показывает, сколько потребитель готов был заплатить на товар, то есть какую пользу в денежном эквиваленте принес бы ему этот товар. Цена предложения (P_s) показывает, какие издержки понесла фирма на производство этого товара. В случае же с негативным внешним эффектом у нас, помимо частных издержек, присутствуют еще и внешние издержки. И мы можем объединить два вида этих издержек в один, создав так называемую функцию общественного предложения товара. Для этого нам необходимо рассчитать внешние предельные издержки, которые обозначаются MEC – *Marginal External Costs.*

$$MEC = EC' = (\frac{Q^2}{2})' = Q$$

И теперь мы можем прибавить эти издержки к P_s, которая показывает предельные издержки производителя, тем самым получив общественные предельные издержки MSC – *Marginal Social Costs*:

$$MSC = P_s + MEC = \frac{Q+60}{2} + Q = \frac{3Q+60}{2}$$

Это и есть функция уже общественного предложения товара. Таким образом, на данном рынке мы учли внешний эффект в функции предложения. Теперь, пересекая общественные спрос и предложения, мы можем найти общественно оптимальный уровень выпуска:

$$\frac{3Q+60}{2} = 120 - Q$$
$$Q^* = 36$$

Теперь можем считать P_d, P_s и все остальное. Кстати, размер потоварного налога, приводящего к максимальному общественному благосостоянию, можно посчитать еще одним интересным способом, который может пригодиться вам для решения сложных задач. Нам нужно указать производителям, что они несут дополнительные издержки. В точке оптимума эти дополнительные издержки на единицу товара составят $MEC = Q = 36$. Получается, что достаточно просто ввести потоварный налог, равный 36, чтобы возложить на производителей эти общественные издержки. То есть оптимальный размер потоварного налога, который приводит к максимальному благосостоянию в совершенной конкуренции, можно вычислить по формуле $t^* = MEC(Q_{SW})$, где Q_{SW} – количество, максимизирующее общественное благосостояние. Кстати, именно такой налог мы и получали предыдущим способом.

Ниже вы можете увидеть все необходимые графические интерпретации и излишки с использованием MEC и MSC:

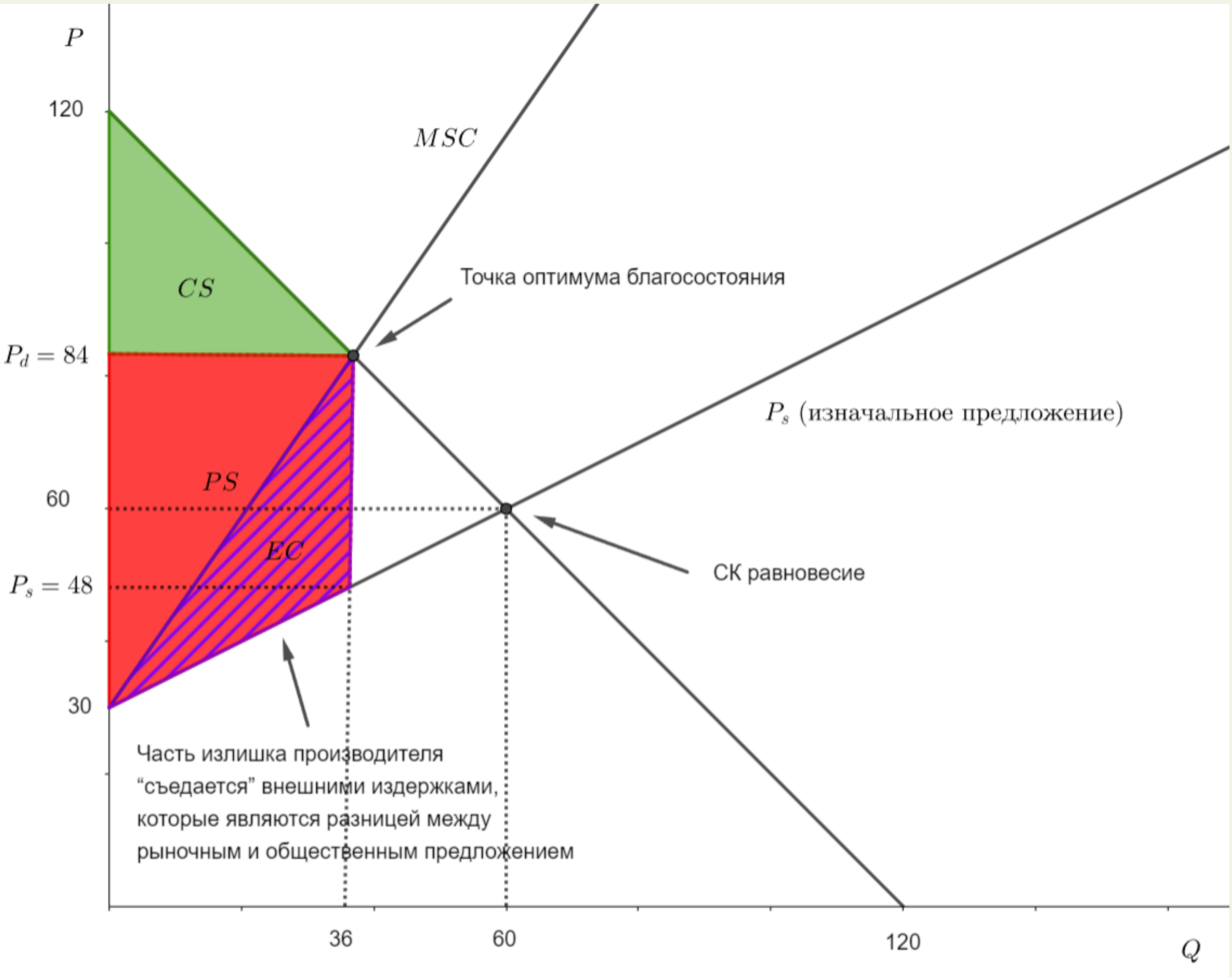


Рис. 99: Излишки в точке оптимума общественного благосостояния при отрицательном внешнем эффекте

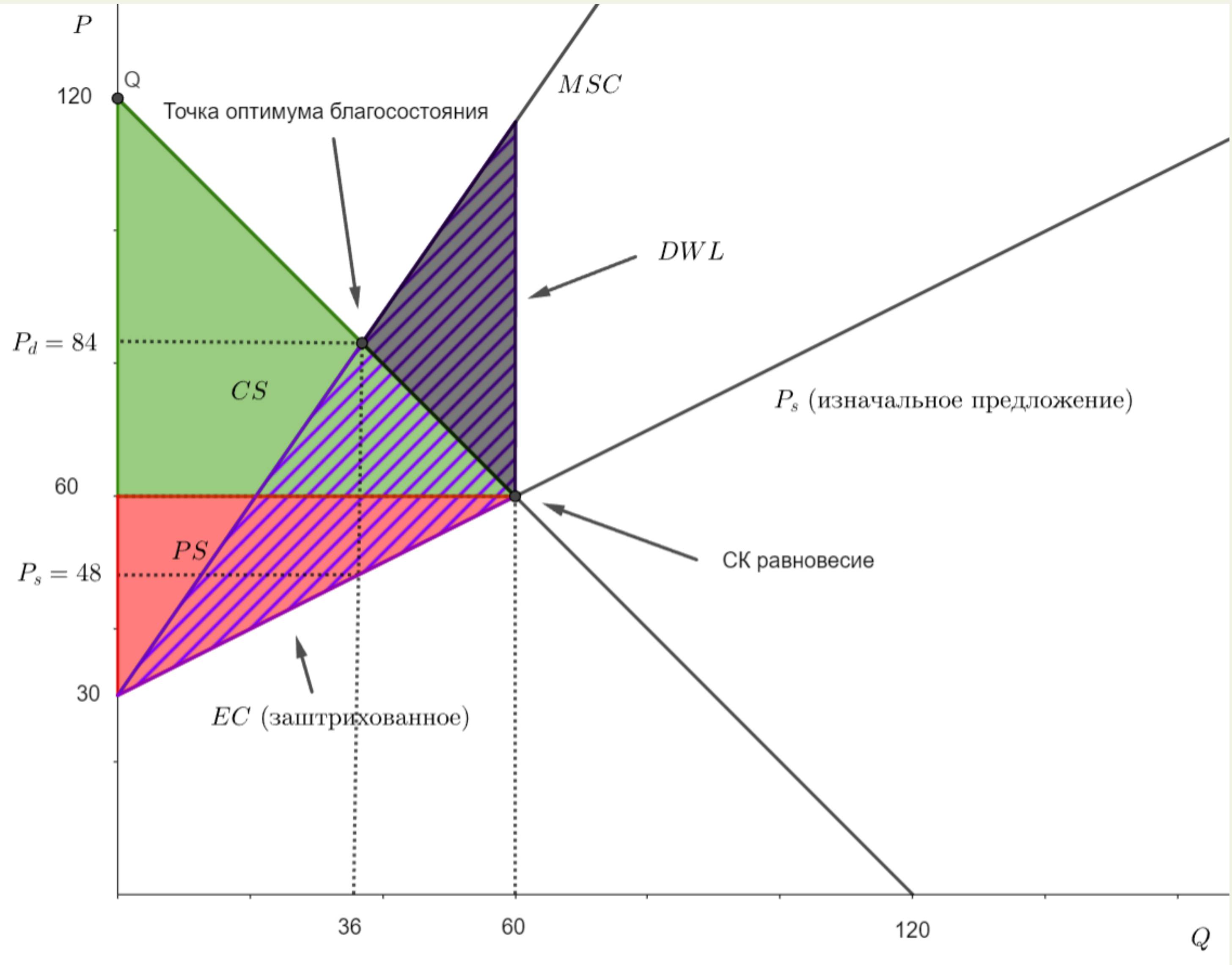


Рис. 100: Излишки в обычном равновесии и DWL при отрицательном внешнем эффекте

В двух графиках выше я обозначил рыночное благостсояние как CS и PS, но при вмешательстве государства некоторые деньги получило бы оно. В любом случае, рыночное благосостояние $MC = CS + PS + GS$ не изменилось бы.

Внешние эффекты в монополии

Общественное благосостояние на рынке не зависит от того, какая рыночная структура на нем используется. Таким образом, ситуация с излишками и благосостояние не будет сильно отличаться при монополии. Разница лишь в том, что равновесие без учета внешних издержек складывается другое (монополист обычно выбирает меньший объем товара), так что излишки в изначальном равновесии (и DWL) меняют свою структуру.

Рассмотрим задачу монополиста с положительным внешним эффектом. Допустим, это коммерческий рынок вакцин. Спрос на вакцины формируется из желания людей не заболеть, но использование вакцины приводит к тому, что человек не заражает других людей, и они будут меньше денег тратить на лекарства. Позитивный эффект от вакцин в денежном эквиваленте мы назовем $ES = \frac{Q^2}{2}$ – *External Surplus*, то есть внешний излишек. Рыночный спрос на вакцины будет иметь вид $P_d = 180 - P$, издержки монополиста на производство вакцин – $TC = Q^2$. Сразу найдем функци предельных издержек монополиста: $MC = TC'_Q = 2Q$. Учтите, что график MC – это то же самое, что и функция предложения в совершенной конкуренции, и в случае с анализом внешних эффектов выполняет ту же функцию.

Также нам пригодится функция MR:

$$P = 180 - Q$$
$$TR = P \cdot Q = 180Q - Q^2$$
$$MR = TR'_Q = 180 - 2Q$$

Рассмотрим изначальный оптимум монополиста. Так как задача простая и MC возрастает, то оптимум достигается при равенства MR и MC:

$$MR = MC$$
$$180 - 2Q = 2Q$$
$$Q^* = 45$$
$$P^* = 180 - 45 = 135$$

Чтобы найти точку максимума общественного благосостояния, нам необходимо учесть положительный внешний эффект. Как и в прошлый раз, рассчитаем предельную внешнюю пользу MES (*Marginal External Surplus*):

$$MES = ES'_Q = Q$$

Теперь мы можем либо прибавить MES к цене спроса, чтобы найти так называемый общественный спрос на вакцины, либо же мы можем отнять MES от предельных издержек и сказать, что производство вакцин уменьшает общественные издержки. Эти варианты полностью равнозначны. Я воспользуюсь вторым. Рассчитаем MSC, как мы делали в предыдущей задаче:

$$MSC = MC - MES = 2Q - Q = Q$$

И теперь найдем пересечение спроса и общественного предложения, чтобы найти оптимальный объем выпуска:

$$P_d = MSC$$
$$180 - Q = Q$$
$$Q_{SW} = 90$$

Также оптимальный объем выпуска можно было найти, просто промаксимизировав общественное благосостояние, которое состояло бы из излишка производителя ($CS = \frac{Q^2}{2}$ по формуле площади треугольника, можете сами меня проверить), прибыли фирмы ($\Pi = TR - TC = 180Q - Q^2 - Q^2$) и величины внешнего излишка:

$$SW = CS + PS + ES = \frac{Q^2}{2} + 180Q - Q^2 - Q^2 + \frac{Q^2}{2} = 180Q - Q^2 \xrightarrow{Q} max$$

График – парабола ветвями вниз, максимум в вершине.

$$Q_{SW} = 90$$

.

Добиться повышения выпуска с 45 до 90 можно путем введения потоварной субсидии для монополии. Добавим потоварную субсидию в функцию прибыли монополии и посчитаем, при каком размере субсидии монополия выберет выпуск, равный 90:

$$\Pi = TR - TC + S = 180Q - Q^2 - Q^2 + s \cdot Q = (180 + s)Q - 2Q^2 \xrightarrow{Q} max$$

$$Q^* = \frac{180+s}{4} = 90$$
$$s = 180$$

Здесь стоит учесть, что монополия сама по себе снижает благосостояние, так как занижает выпуск по сравнению с совершенным конкурентом. В общем виде мы можем оценить только суммарный DWL, который создает монополия и внешний эффект. Для этого рассчитаем благосостояние при равновесном монопольном выпуске ($Q = 45$), и при оптимальном выпуске ($Q = 90$):

$$SW(45) = 180Q - Q^2 = 180 \cdot 45 - 45^2 = 6075$$
$$SW(90) = 180Q - Q^2 = 180 \cdot 90 - 90^2 = 8100$$

Такм образом, суммарный DWL от монополии и внешнего эффекта равен:

$$DWL = SW^* - SW(45) = 8100 - 6075 = 2025$$

Внешние эффекты в Олигополии

В очередной раз скажу, что благосостояние на рынке не зависит от рыночной структуры, так что мы будем применять все те же приемы, хотя в олигополии они гораздо менее очевидны. Мы рассмотрим только модель одновременного выбора (Курно), так как во всех остальных моделях происходит всё то же самое.

Рассмотрим две фирмы, конкурирующих на спросе $Q = 120 - P$. Издержки фирм равны $TC_1 = Q_1^2$, $TC_2 = \frac{Q_2^2}{2}$. Однако, первая фирма использует в производстве передовые и экологичные технологии и не создает выбросов в атмосферу, а вторая фирма работает на старом и загрязняющем атмосферу оборудовании (вот почему у нее и издержки меньше). Негативный внешний эффект, создаваемый выбросами второй фирмы, можно описать как $EC = \frac{Q_2^2}{2}$. Нашей задачей будет нахождение таких потоварных ставок налогов или субсидий, которые помогут государству достичь макимального уровня благосостояния на этом рынке.

Для начала найдем равновесие без вмешательства и учета внешнего эффекта. Для это из прибылей фирм найдем их линии реакции и пересечем их (здесь я не буду проверять нули линий реакций для простоты):

$$P = 120 - Q_1 - Q_2$$
$$\Pi_1 = (120 - Q_1 - Q_2)Q_1 - Q_1^2 = (120 - Q_2)Q_1 - 2Q_1^2 \xrightarrow{Q_1} max$$
$$Q_1^* = \frac{120 - Q_2}{4}$$
$$\Pi_2 = (120 - Q_1 - Q_2)Q_2 - \frac{Q_2^2}{2} = (120 - Q_1)Q_2 - \frac{3Q_2^2}{2} \xrightarrow{Q_2} max$$
$$Q_2^* = \frac{120 - Q_1}{3}$$

Пересекаем линии реакции и получаем $Q_1 = \frac{240}{11}$, $Q_2 = \frac{360}{11}$.

Нахождение максимума благосостояния через предельные функции

Следующим шагом найдем точку максимального благосостояния. Во-первых, с точки зрения общества без разницы, кто несет издержки, так что мы можем сложить издержки второй фирмы с внешними, получив общественные издержки второй фирмы:

$$TC_2(Social) = \frac{Q_2^2}{2} + \frac{Q_2^2}{2} = Q_2^2$$

Теперь учтем, что максимальное благосостояние подразумевает производство товара с минимальными издержками. Таким образом, задача максимизации благосостояния сводится к промежуточной задаче оптимизации двух заводов: найти минимальный уровень издержек для производства Q единиц товара при наличии двух заводов с функциями издержек $TC_1 = Q_1^2$, $TC_2 = Q_2^2$ (на забывайте, что у второй фирмы это сумма ее и внешних издержек). Различные способы сложения двух заводов вы можете посмотреть в соответствующем разделе в учебнике, я же сразу выведу общую функцию MC с помощью горизонтального сложения предельных издержек каждого завода, воспользовавшись тем, что оптимум для этих двух зводов будет достигаться при $MC_1 = MC_2 = MC$. Полученная функция будет являться функцией общественных издержек (MSC), которая учитывает внешние издержки, издержки двух фирм и оптимальное распределение выпусков между ними с точки зрения общества:

$$MC_1 = 2Q_1$$
$$Q_1 = \frac{MC}{2}$$
$$MC_2 = 2Q_2$$
$$Q_2 = \frac{MC}{2}$$
$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{MC}{2} + \frac{MC}{2} = MC$$
$$MC = MSC = Q$$

Ну и далее мы можем пересечь общественный спрос и издержки, получив оптимальные объемы производства:

$$P_d = MSC$$
$$120 - Q = Q$$
$$Q = 60$$
$$MC = Q = 60$$
$$Q_1 = Q_2 = \frac{MC}{2} = 30$$

То есть в оптимуме каждая фирма должна производить 30 единиц товара.

Нахождения максимума благосостояния в лоб

Тот же самый результат можно было бы получить, записав в лоб общественное благосостояние и прооптимизировав его по двум переменным. Излишек потребителя здесь можно записать как $CS = \frac{(Q_1+Q_2)^2}{2}$ из формулы площади треугольника. Далее запишем всё благосостояние как $SW = CS + \Pi_1 + \Pi_2 - EC$:

$$SW = CS + \Pi_1 + \Pi_2 - EC = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2} + (120 - Q_1 - Q_2)Q_1 - Q_1^2 + (120 - Q_1 - Q_2)Q_2 - \frac{Q_2^2}{2} - \frac{Q_2^2}{2}$$

Можете проверить себя и решить оптимизацию самостоятельно. Как оптимизировать функции по двум переменным вы можете посмотреть в разделе «Математика» в начале учебника. В результате оптимизации также должно получиться $Q_1 = Q_2 = 30$.

Что делать государству, чтобы добиться оптимального выпуска?

Государство хочет добиться выпусков $Q_1 = Q_2 = 30$. Обозначим t_1 и t_2 как потоварные налоги, которые мы будем вводить на данные фирмы. Заметьте, что если t_1 или t_2 получатся отрицательными, то они будут попросту обозначать, что нам нужно ввести не налог, а субсидию в этом размере. Добавим налоги в прибыли фирм и найдем, при каких ставках в оптимумах фирм будет верно, что $Q_1 = Q_2 = 30$:

$$\Pi_1 = (120 - Q_1 - Q_2)Q_1 - Q_1^2 - t_1Q_1 = (120 - Q_2 - t_1)Q_1 - 2Q_1^2 \xrightarrow{Q_1} max$$

$$Q_1^* = \frac{120 - Q_2 - t_1}{4}$$

$$30 = \frac{120 - 30 - t_1}{4}$$

$$t_1 = -30$$

$$\Pi_2 = (120 - Q_1 - Q_2)Q_2 - Q_2^2 - t_2Q_2 = (120 - Q_1 - t_2)Q_2 - \frac{3Q_2^2}{2} \xrightarrow{Q_2} max$$

$$Q_2^* = \frac{120 - Q_1 - t_2}{3}$$

$$30 = \frac{120 - 30 - t_2}{3}$$

$$t_2 = 0$$

Таким образом мы получили, что на вторую фирму ничего вводить не надо (хотя именно она создлает негативный внешний эффект), а вот первой фирме нужно выдать потоварную субсидию, равную 30. Таким образом, мы снизим влияние второй фирмы, а также повысим общий выпуск на рынке, чтобы компенсировать отрицательный эффект олигополии: олигополисты, как и монополисты, занижают выпуск по сравнению с оптимальным.

Рынок труда

Рынок труда – обычный рынок, в качестве «количества» на котором выступает количество труда (L), оно может выражаться в количестве рабочих или в количестве человеко-часов, а «ценой» на котором является зарплата (w).

На рынок труда распростряняются все те же рыночные структуры, что и на рынок товара, только обычно предполагается, что труд предлагают много людей, а вот покупателей труда (труд покупают фирмы) может быть несколько. Таким образом, базовые рыночные структуры на рынке труда – это совершенная конкуренция, монопсония или олигопсония. Правила, по которым работают эти структуры, не отличаются от обычных СК, монополии и олигополии. Тем не менее, в задачах на рынок труда часто возникают проблемы, поэтому мы разберем задачи на этот рынок отдельно.

Базовая оптимизация фирмы на рынке труда

Здесь мы будем рассматривать фирму, единственным фактором производства которой является труд. В таком случае издержки данной фирмы будут состоять только из оплаты труда и выражаться следующий образом: $TC = w \cdot L$. Заметьте, что эта функция издержек остается одинаковой вне зависимости от рыночной структуры фирмы.

Представим себе задачу, в которой данная фирма является монополистом на рынке товара со спросом $P = 120 - Q$ и имеет производственную функцию $Q = 2L$. Предложение труда на данном рынке будет задаваться как $L_s = \frac{w}{4}$ Теперь разберем основные две рыночные структуры, которые могут возникнуть на этом рынке:

Совершенная конкуренция на рынке труда

В случае совершенной конкуренции фирма воспринимает зарплату как константу, то есть не может использовать функцию предложения для оптимизации прибыли. Запишем прибыль нашей фирмы:

$$\Pi = TR - TC = P \cdot Q - w \cdot L = (120 - Q) \cdot Q - 2 \cdot L = (120 - 2L) \cdot 2L - w \cdot L = 240L - wL - 4L^2$$

Заметьте, что зарплата – константа, то есть она остается буквой w в нашей прибыли. Можем прооптимизировать прибыль, так как в ней осталась только одна переменная, и это – парабола ветвями вниз:

$$\Pi = 240L - wL - 4L^2 \xrightarrow{L} max$$

$$L^* = \frac{240 - w}{8}$$

Понятно, что при $w > 240$ оптимальное $L = 0$, не будем отдельно рассматривать этот случай. Таким образом, результатом оптимизации прибыли фирмы-совершенного конкурента на рынке труда является функция спроса на труда: $L_d = \frac{240-w}{8}$. Эту функцию теперь можно приравнять к предложение труда, чтобы найти конкурентное равновесие:

$$L_s = L_d$$

$$\frac{240 - w}{8} = \frac{w}{4}$$
$$w = 80$$

Монопсония на рынке труда

В случае монопопсонии (наша фирма является единственным покупателем труда на рынке), мы имеем рыночную власть и сами устанавливаем зарплату, учитывая, сколько людей будут готовы за нее работать. В таком случае w не является константой, а становится связана с L.

Выпишем прибыль нашей фирмы, причем все начинается точно также, как и в совершенной конкуренции:

$$\Pi = TR - TC = P \cdot Q - w \cdot L = (120 - Q) \cdot Q - 2 \cdot L = (120 - 2L) \cdot 2L - w \cdot L$$

Однако теперь, как монополист может использовать функцию спроса для собственной оптимизации, фирма-монопсонист может использовать функцию предложения труда, чтобы понять связь зарплаты и количества работников, которое она наймет:

$$L_s = \frac{w}{4}$$
$$w = 4L$$
$$\Pi = (120 - 2L) \cdot 2L - w \cdot L = (120 - 2L) \cdot 2L - 4L \cdot L = 240L - 8L^2 \xrightarrow{L} max$$

График функции – парабола ветвями вниз. Максимум в вершине:

$$L^* = \frac{240}{16} = 15$$
$$w^* = 4L = 60$$

Предельные функции на рынке труда

Как и любые задачи на рыночные структуры, задачи на фирму на рынке труда являются задачами на оптимизацию. А любые задачи на оптимизацию, как мы знаем. имеют основные два метода решения: метод прямой оптимизации (его мы разбирали выше) и метод предельных функций.

На самом деле, решение оптимизации фирмы на рынке труда также ничем не отличичается от обычной оптимизации: мы будем использовать функции MR и MC, только на рынке труда они называются MRP_L (предельная выручка продукта труда) и MC_L (предельные затраты на единицу труда). Это те же самые MR и MC, только взятые не по количеству, а по труду:

$$MC = TC'_Q$$
$$MR = TR'_Q$$
$$MC_L = TC'_L$$
$$MRP_L = TR'_L$$

Разберем эти функции отдельно:

MCL

MC_L показывает, какие затраты несет фирмы на каждого нанятого работника. Так как эта функция является производной от общих издержек, мы можем записать ее следующим образом:

$$MC_L = TC'_L = (w \cdot L)'_L$$

Теперь вы можете заметить, что в случае совершенной конкуренции на рынке труда (w – константа), $MC_L = (w \cdot L)'_L = w$, то есть предельные затраты на одного работника равны его зарплате.

В случае же с монопсонией на рынке труда предельные затраты будут выше зарлпты, так как для нанятия новых работников придется увеличивать зарплаты уже нанятым. Например, если предложение труда имеет вид $L_s = \frac{w}{4}$ ($w = 4L$), то MC_L будет иметь следующий вид:

$$MC_L = (w \cdot L)'_L = (4L \cdot L)'_L = (4L^2)'_L = 8L > 4L = w$$

MRPL

MRP_L показывает, какую дополнительную выручку принесет нам каждый нанятый работник. Она может считаться как производная выручки по количеству труда. Однако считать ее можно по другому: умножив объем товара, который произведет нам этот работник (он называется предельный продукт труда, $MP_L = Q'_L$) на количество денег, которое приносит каждый товар (то есть на $MR = TR'_Q$), получая следующую функцию:

$$MRP_L = MR \cdot MP_L$$

Это же выражение можно получить через производную сложной функции:

$$MRP_L = TR(Q(L))'_L = TR'_Q \cdot Q'_L = MR \cdot MP_L$$

Как работать с MRPL и MCL

Точно так же, как мы работаем с MR и MC во всех остальных рыночных структурах.

Давайте разберем задачу из начала этой темы. Напомню условия:

Фирма является монополистом на рынке товара со спросом $P = 120 - Q$ и имеет производственную функцию $Q = 2L$. Предложение труда на данном рынке будет задаваться как $L_s = \frac{w}{4}$ ($w = 4L$). Необходимо найти равновесную зарплату на этом рынке, если фирма является монопсонистом на рынке труда.

Для начала выведем формулы MRP_L и MC_L:

$$MR = TR'_Q = ((120 - Q)Q)'_Q = 120 - 2Q$$

$$MP_L = Q'_L = (2L)'_L = 2$$

$$MRP_L = MR \cdot MP_L = (120 - 2Q) \cdot 2 = (120 - 4L) \cdot 2 = 240 - 8L$$

$$MC_L = TC'_L = (w \cdot L)'_L = (4L^2)'_L = 8L$$

Далее нам нужно нарисовать эти функции на графике, и обозначить площади прибылей и убытков, прямо как в обычных MR и MC:

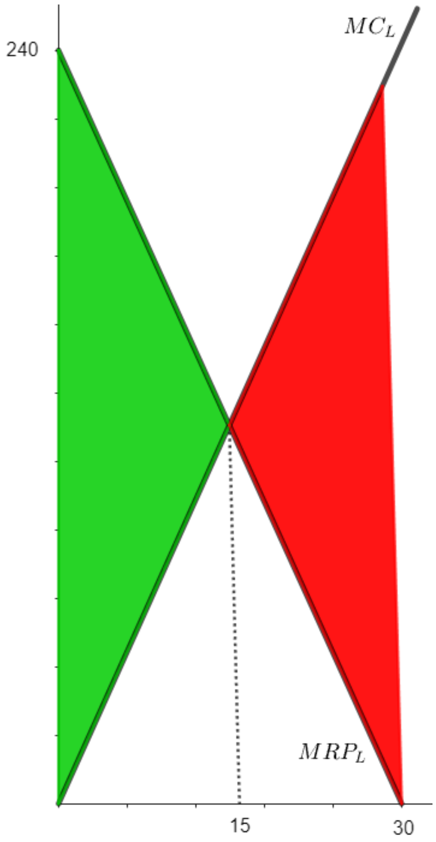


Рис. 101: График MC_L и MRP_L с прибылями и убытками

Пересекаются эти две функции в точке 15: $240 - 8L = 8L$, $L = 15$.

До этой точки за каждого нанятого работника фирма выходит в плюс (так как $MRP_L > MC_L$), а после – теряет деньги. Следовательно, оптимум достигается как раз в точке $L = 15$. Зарплата тогда составит $w = 4L = 60$. Задача решена.

Вы можете заметить, что получилось такое же классическое равновесие, как и $MR = MC$ в монополии. Заметьте, что этим условием нельзя пользоваться без доказательства: все эти функции крайне желательно изображать на графике для подсчете прибылей и убытков.

Дискриминация на рынке труда

И опять же, ничего нового. Дискриминация работает точно так же, как и в теме «Монополия». Однако, для большей наглядности мы все же рассмотрим пример дискриминации третьего рода на рынке труда.

Представьте себе фирму, являющуюся монополистом на рынке товара со спросом $Q = 180 - 2P$ ($P = 90 - \frac{Q}{2}$). Фирма использует труд как единственный фактор производства (имея производственную функцию $Q = 2L$) и является монопсонистом на рынке труда среди двух групп населения: квалифицированных специалистов (их предложение имеет вид $L_1^s = 2w_1 - 60$) и разнорабочих (их предложение можно описать как $L_2^s = w_2$). Фирма может назначать этим двум группам рабочих разную зарплату. Нам нужно узнать, собственно, зарплату, которую фирма назначит этим двум группам.

Так же, как и в монополии, решать дискриминацию гораздо удобнее через предельные функции. Конкретно в дискриминации на рынке труда нас интересует оптимизация MC_L. Более того, здесь мы полностью выведем интересующую нас функцию MC_L с помощью горизонтального сложения. Для начала найдем отдельные функции MC_L для каждой группы работников (так как их зарплаты не зависят друг от друга, мы можем это сделать):

$$L_1^s = 2w_1 - 60$$
$$w_1 = \frac{L_1}{2} + 30$$
$$TC_{L_1} = w_1 \cdot L_1 = \frac{L_1^2}{2} + 30L_1$$
$$MC_{L_1} = TC'_{L_1} = L_1 + 30$$

$$L_2^s = w_2$$
$$w_2 = L_2$$
$$TC_{L_2} = w_2 \cdot L_2 = L_2^2$$
$$MC_{L_2} = TC'_{L_2} = 2L_2$$

Теперь проанализируем полученные функции. Сначала мы будем использовать труд разнорабочих, так как их MC_L начинаются с нуля, тогда как квалифицированные специалисты готовы работать только начиная с зарплаты в 30. Однако, чем больше мы нанимаем разнорабочих, тем больше их MC_L. Когда он сравняется с 30, далее нам будет выгодно нанимать уже обе группы рабочих, причем так, чтобы $MC_{L_1} = MCL_2 = MCL$, ведь иначе мы можем изменить L_1 и L_2 до равенства, перебрасывая закупки труда на ту группу, где MC_L ниже.

Получается, что итоговая функция MC_L будет состоять из двух участков: до значения функции в 30 (значит до $2L = 30$, то есть до $L = 15$) мы будем нанимать только разнорабочих, и общий MC_L будет выглядеть так же, как MC_L для этой группы, а затем MC_L будет являться горизонтальной суммой этих двух функций (так как мы будем нанимать такое количество L_1 и L_2, чтобы их MC_L были равны).

Для начала найдем уравнение второго участка горизонтальным сложением:

$$MC_{L_1} = L_1 + 30$$
$$L_1 = MC_L - 30$$

$$MC_{L_2} = 2L_2$$
$$L_2 = \frac{MC_L}{2}$$

$$L = L_1 + L_2 = MC_L - 30 + \frac{MC_L}{2} = \frac{3}{2}MC_L - 30$$
$$MC_L = \frac{2}{3}L + 20$$

И изобразим все полученные функции на графике для наглядности:

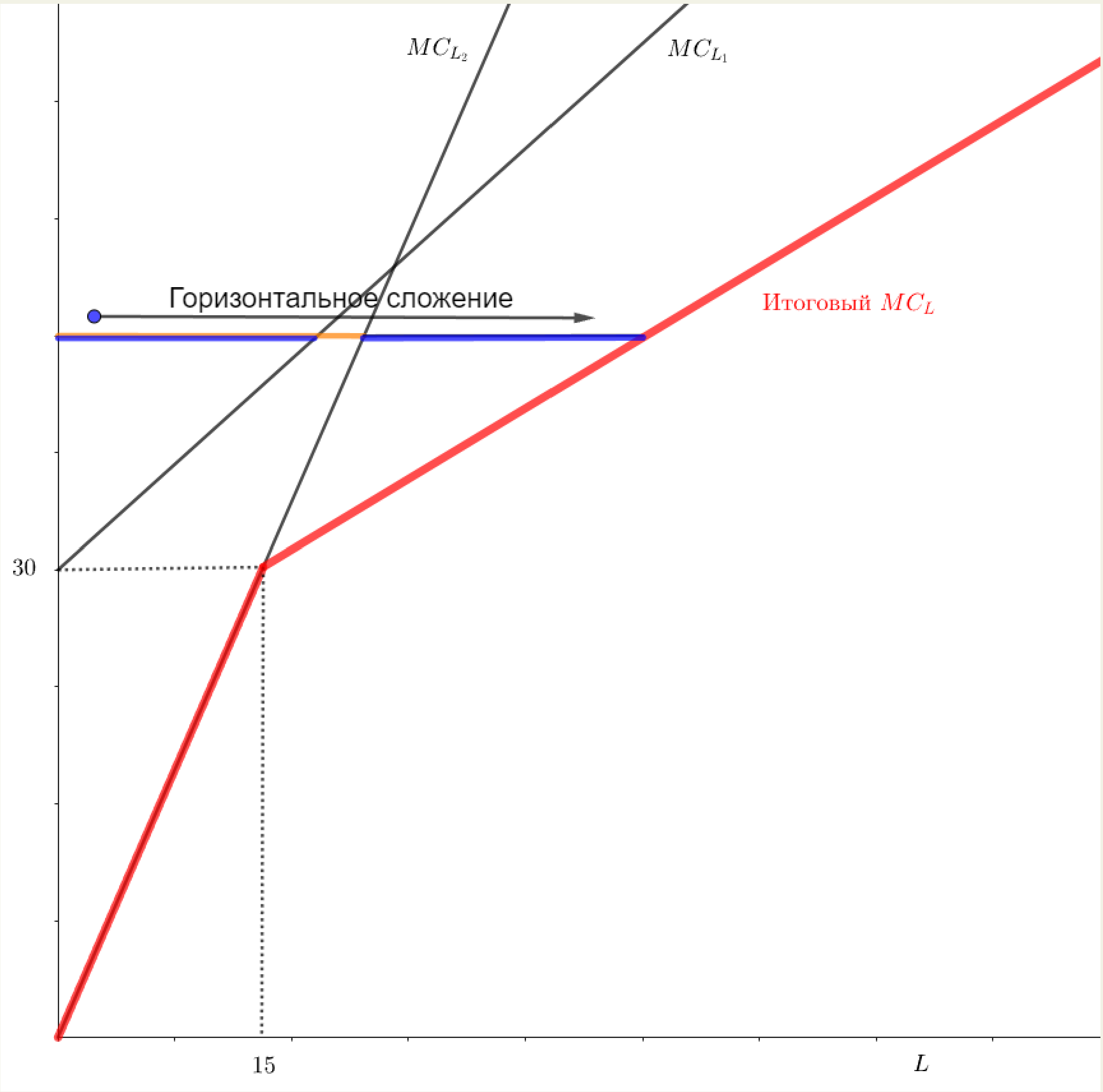


Рис. 102: Горизонтальное сложение MC_L

Заметьте, что второй участок получившихся MC_L ниже, чем изначальные: ведь, перераспределив оптимальным образом закупки труда двух групп, мы снизили наши затраты по сравнению с тем, если бы мы покупали труд только у одной группы.

Затем выведем уравнение MRP_L:

$$MR = TR'_Q = (90 - \frac{Q}{2}) \cdot Q)'_Q = 90 - Q$$

$$MP_L = Q'_l = 2$$

$$MRP_L = MR \cdot MP_L = (90 - Q) \cdot 2 = (90 - 2L) \cdot 2 = 180 - 4L$$

Нарисуем MC_L и MRP_L на одном графике, указав прибыли и убытки, и рассчитаем оптимум (заметьте, что при $L = 15$ $MRP_L = 180 - 4 \cdot 15 = 120 > 30$):

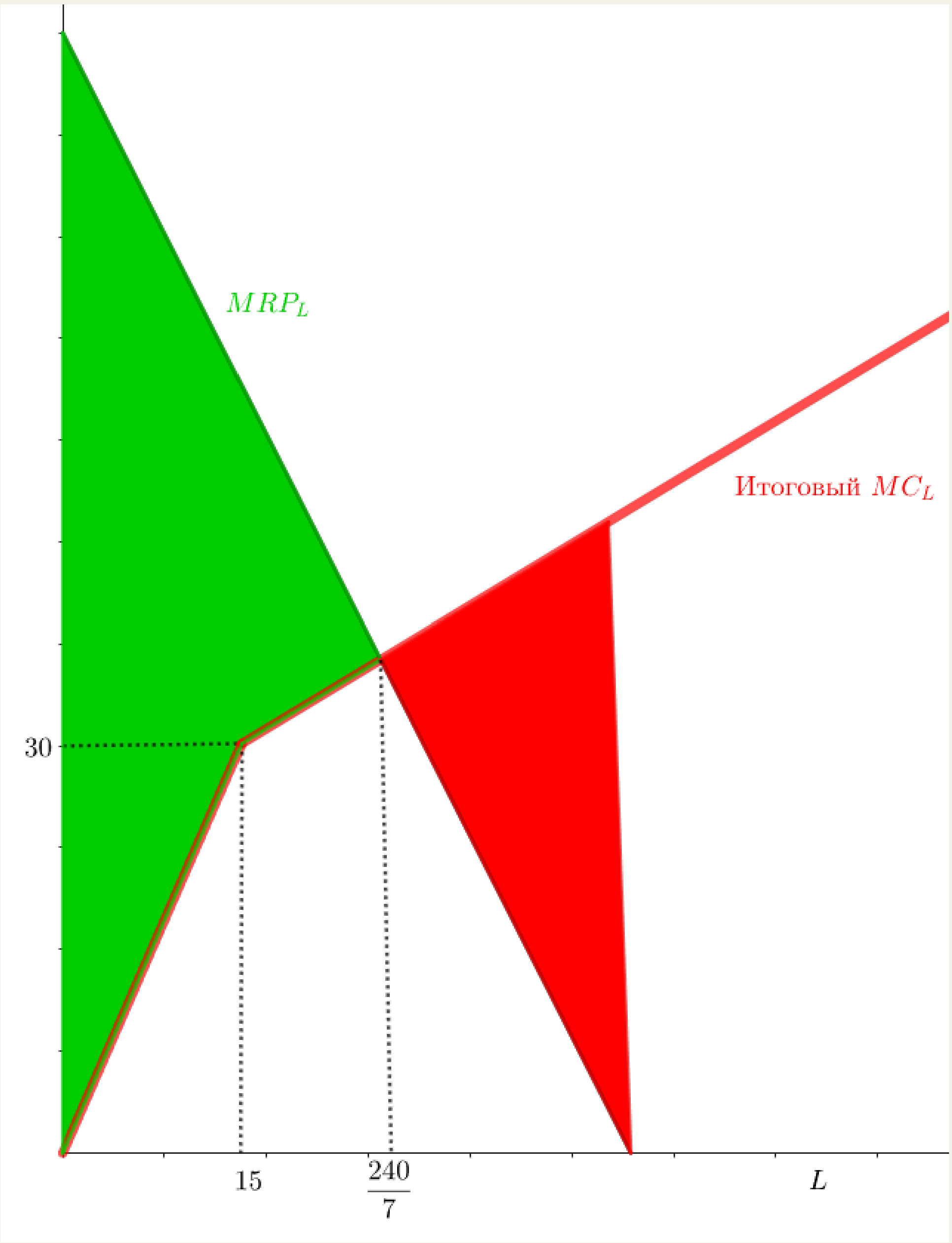


Рис. 103: Оптимум при дискриминации на рынке труда

Пересечение двух функций находится в точке $\frac{2}{3}L + 20 = 180 - 4L$, $L = \frac{240}{7}$.

Далее можем найти нанятое количество труда из каждой группы и зарплаты, которые монопсонист установит каждой группе рабочих:

$$MC_L = 180 - 4 \cdot \frac{240}{7} = \frac{300}{7}$$

$$L_1 = MC_L - 30 = \frac{90}{7}$$

$$w_1 = \frac{L_1}{2} + 30 = \frac{255}{7}$$

$$L_2 = \frac{MC_L}{2} = \frac{150}{7}$$

$$w_2 = L_2 = \frac{150}{7}$$

Вот так вот и решается дискриминация на рынке труда.

Эластичность

Сразу предупрежу, существует большая вероятность, что эта тема вам не понравится и будет бесить, потому что так происходит почти со всеми, кто изучает олимпиадную экономику. На самом деле, в ней нет особо ничего сложно, нужно просто выучить несколько правил и лайфхаков.

Эластичность - величина, которую в экономике очень любят высчитывать. В реальном мире расчет эластичности нужен для составления правильной ценовой политики. В олимпиадной экономики нам нужно просто уметь расчитывать эластичность различных функций и пользоваться ее свойствами. Вообще, эластичность - это математическое понятие, которое используется в основном только в экономике. Итак, познакомьтесь:

Эластичностью называют изменение значения функции **в процентах** при увеличении аргумента на 1 процент. По определению, эластичностью функции $f(x)$ называется следующая величина:

$$E_f^x = \frac{\Delta f\%}{\Delta x\%}$$

Пример простейшей задачки на подсчет эластичности:

Допустим, на неизменном спросе объем продаж снизился с 300 до 270, и при этом цена увеличилась с 5 до 6. Давайте расчитаем эластичность спроса по цене при этом изменении.

Процентное изменение количества: $\Delta Q\% = \frac{270-300}{300} * 100\% = -10\%$ (Заметьте, так как количество уменьшилось, то $\Delta Q\%$ будет отрицательной величиной). Также найдем процентное изменение цены: $\Delta P\% = \frac{6-5}{5} * 100\% = 20\%$. Тогда эластичность спроса при данном изменении будет равняться $E_D^P = \frac{\Delta Q_d\%}{\Delta P\%} = \frac{-10\%}{20\%} = -\frac{1}{2}$.

В большинстве случаев (Порядка 90 % задач), у вас будут задачи про эластичность количества по цене (E_Q^P), например, эластичность спроса по цене (E_D^P) или эластичность предложения по цене (E_S^P). Заметьте, что закон спроса и закон предложения говорит о том, что спрос обладает отрицательной эластичностью по цене, а предложение - положительной.

Из определения эластичности выводятся различные ее формулы, использующиеся в различных ситуациях. Давайте сначала посмотрим на эти формулы и как правильно их применять.

Формулы эластичности

В данном разделе мы будем рассматривать эластичность количества по цене, однако формулы будут верны для эластичности любых других функций. Итак, сначала распишем, что такое процентные изменения и немного посокращаем:

$$E_Q^P = \frac{\Delta Q\%}{\Delta P\%} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q} * 100\%}{\frac{\Delta P}{P} * 100\%} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q}$$

Здесь обычные P и Q - это изначальные значения цены и количества. Так как в различных участках спроса может быть различная эластичность, то по данной формуле расчитывается эластичность в конкретной начальной точке.

Например, на спросе при увеличении количества с 50 до 60 цена уменьшилась с 55 до 50. То есть у нас есть, по сути, две точки на спросе: при цене 55 продается 50 единиц, а при цене 50 продается 60 единиц.

Чтобы посчитать эластичность в точке (55;50), нужно представить, что мы попадаем из нее в точку (50;60). Тогда получается, что $\Delta Q = 10$, $\Delta P = -5$, а вместо P и Q подставляем значения точки, в которой мы хотим посчитать эластичность ($Q = 50$, $P = 55$) Тогда $E_D^P = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q} = \frac{10}{-5} * \frac{55}{50} = -\frac{11}{5}$

Если в точно таких же обстоятельствах нам нужно посчитать эластичость во второй точке (где $Q = 60$, а $P = 50$), то она будет другой: $E_D^P = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q} = \frac{-10}{5} * \frac{50}{60} = -\frac{5}{3}$.

Пример эластичности, который мы с вами сейчас посмотрели, называется **точечной** эластичностью, так как рассчитывается с помощью двух **точек**. В явном виде точечную эластичность можно посчитать по следующей формуле:

$$E_Q^P = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q} = \frac{Q_1 - Q_2}{P_1 - P_2} * \frac{P_1}{Q_1}$$

Здесь P_1 и Q_1 обозначают координаты точки, в которой вы хотите посчитать эластичность, а P_2 и Q_2 - координаты второй (вспомогательной) точки.

Данную формулу точеченой эластичности обычно применяют при **незначительных** изменениях цены и количества, так как при увеличении расстояния между точками точность такого измерения снижается.

Для более точного подсчета точечной эластичности при значительных изменениях цены и количества между точками используется формула **дуговой** эластичности. Дуговая эластичность высчитывает значение **ровно посередине отрезка** между двумя данными точками. Тогда на место точки нужно подставить середину отрезка (а ее координаты равны среднему арифметическому двух данных точек):

$$E_Q^P = \frac{Q_1 - Q_2}{P_1 - P_2} * \frac{P}{Q} = \frac{Q_1 - Q_2}{P_1 - P_2} * \frac{\frac{P_1+P_2}{2}}{\frac{Q_1+Q_2}{2}} = \frac{Q_1 - Q_2}{P_1 - P_2} * \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}$$

Посмотрите на следующий график какой-то случайной функции спроса и двух точек на ней:

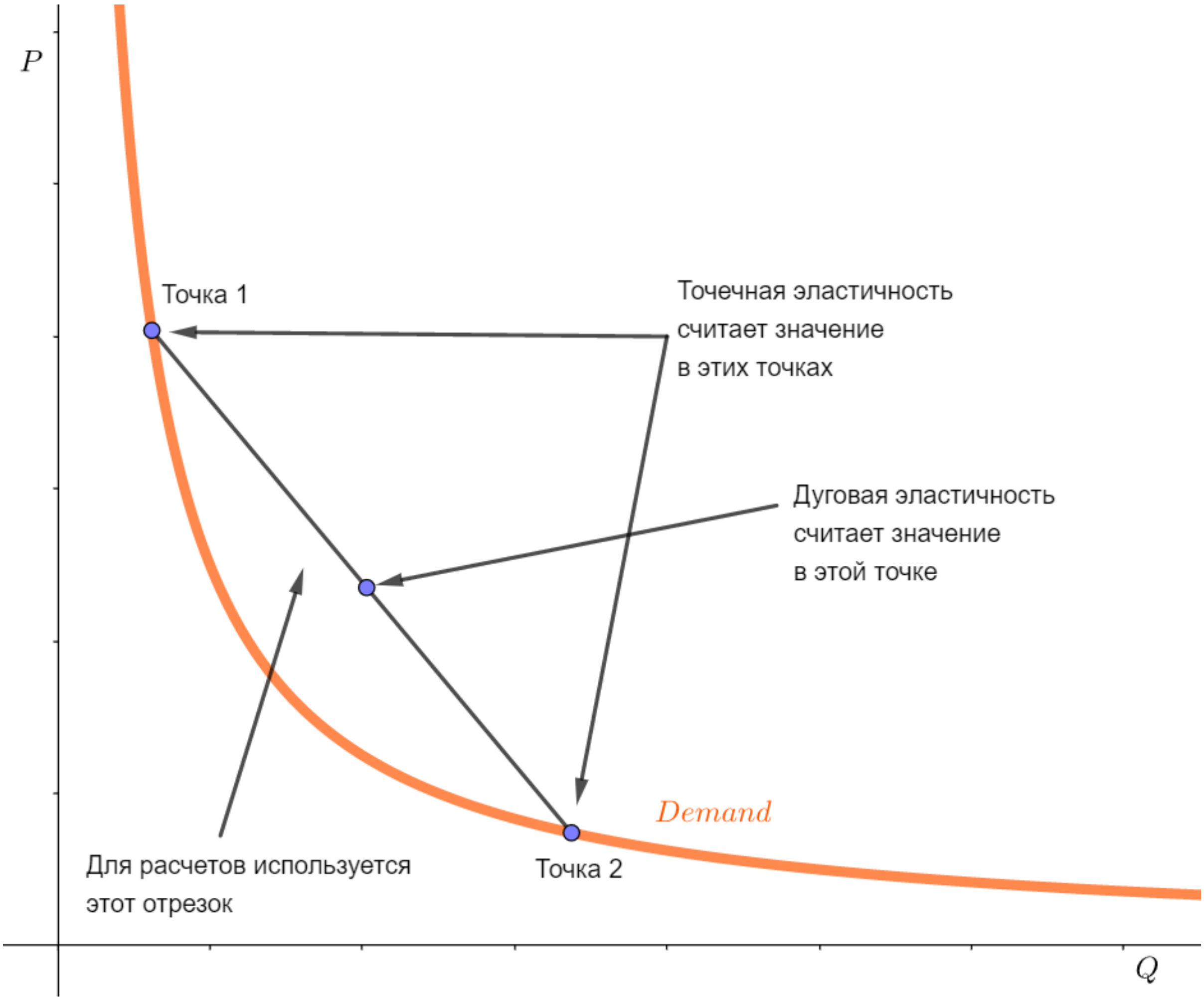


Рис. 104: Эластичность по двум точкам

Как вы могли заметить, для расчета эластичности по двум точкам используются только их координаты, то есть форма самого спроса не берется в расчет. Таким образом, чем дальше точки находятся друг от друга, тем меньше отрезок, соединяющий их, похож на оригинальную функцию спроса, и тем хуже эластичность описывает спрос. Чем более нелинейный спрос, тем большую погрешность будет давать точечная эластичность.

Однако, если для расчетов мы сможем взять две **бесконечно близкие** точки, то точность расчета эластичности будет максимальна, потому что отрезок будет бесконечно близко напоминать функцию спроса! (Если вы ничего не поняли, попробуйте посмотреть раздел **Производная** в матаппарате, где объяснятеся похожий принцип).

Вспомним, как мы изначально выразили формулу эластичности:

$$E_Q^P = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q}$$

В случае, если две точки находятся максимально близко друг к другу, $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ по определению является производной функции $Q = f(P)$! Например, если $Q = 10 - 3P$, то $\frac{\Delta Q}{\Delta P} = Q'(P) = -3$.

В таком случае формула эластичности преобразовывается в:

$$E_Q^P = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q} = Q'_P * \frac{P}{Q}$$

Эта формула называется **коэффициентом эластичности**, и для ее расчета нужна всего одна точка! Однако, нам нужна еще и функция, чтобы мы могли взять производную.

Например, рассчитаем эластичность нашей функции спроса $Q_d = 10 - 3P$ по цене при $P = 2$: $E_D^P = Q'_P * \frac{P}{Q} = (-3) * \frac{2}{10-3*2} = (-3) * \frac{2}{4} = -\frac{3}{2}$.

Итак, если для расчета даны две точки, мы используем формулу точечной эластичности, если дана функция - то формулу коэффициента эластичности.

Также, характеризовать эластичость принято по модулю: например, говорят, что эластичность высокая (а функция, соответственно, является **эластичной**), если она по модулю выше 1. Если же эластичность меньше 1 по модулю, то функция является **неэластичной**.

Например, если спрос обладает эластичностью по цене (-2) в какой-то точке, то в этой точке спрос будет эластичным.

Геометрический смысл эластичности для линейных функций

Решение эластичности через геометрию - самый полезный прием в данной теме. Здесь мы рассмотрим, какую геометрическую интерпретацию имеет эластичность спроса и предложения, что поможет вам значительно сокращать время на решения задач по этой теме, на которую действительно есть очень много задач.

Начнем с линейного спроса.

Геометрический смысл эластичности линейного спроса

Посмотрим на следующую картинку, на которой изображен такой спрос:

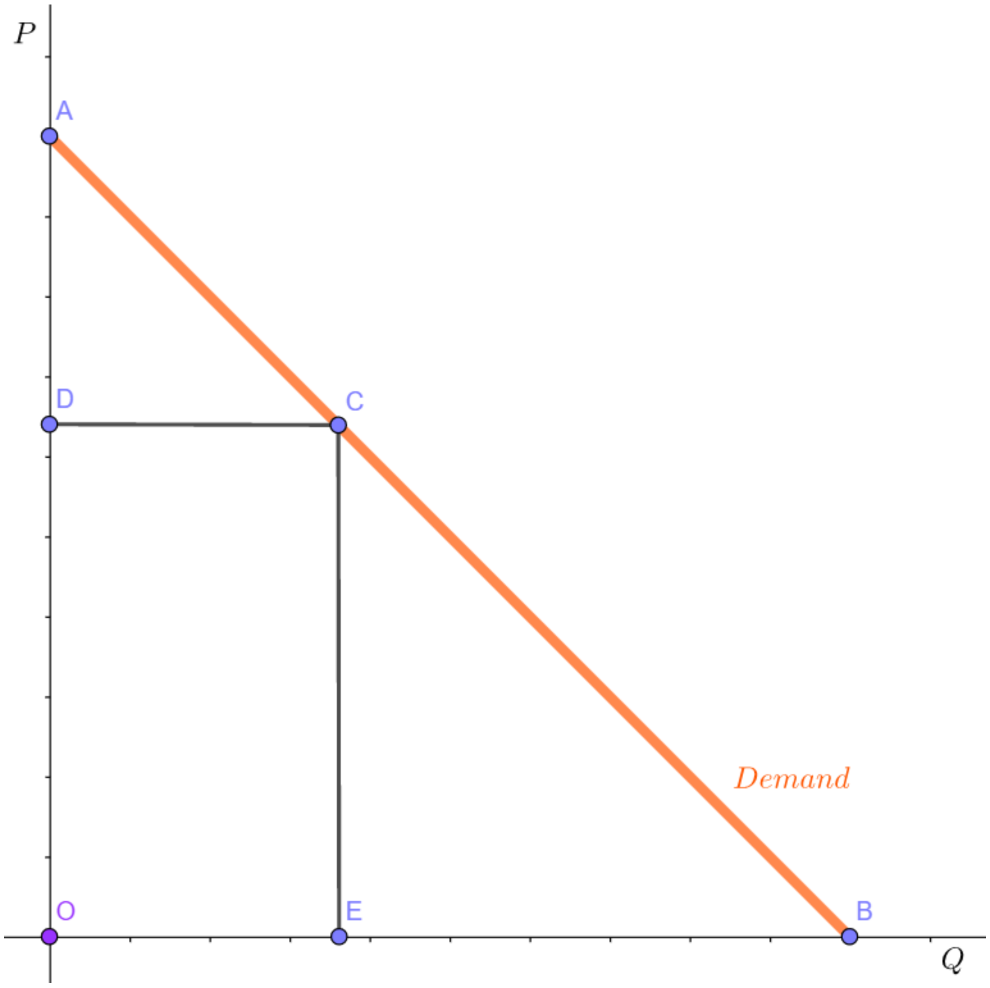


Рис. 105: Геометрический смысл эластичности спроса

Нашей задачей будет высчитать эластичность данного спроса по цене в точке C. Так как для линейной функции все равно, что использовать: точечную эластичность или коэффициент эластичности (потому что касательная совпадает с графиком функции, следовательно $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ будет одинаково как для удаленных, так и для максимально близких точек), я буду использовать самую простую формулу:

$$E_D^P = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q}$$

В качестве второй точки (чтобы высчитать ΔQ и ΔP), я возьму точку A. Итак, у нас есть две точки, C и A. Выпишем для них отрезки, соответствующие переменным в формуле (Не забываем, нам нужна эластичность в точке C, значит, Q и P подставляются из точки C):

$$\Delta Q = -|OE|$$

$$\Delta P = |AD|$$

$$Q = |OE|$$

$$P = |DO|$$

Подставим это все в формулу:

$$E_D^P = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q} = \frac{-|OE|}{|AD|} * \frac{|DO|}{|OE|} = -\frac{|DO|}{|AD|}$$

Мы получили геометрический смысл эластичности спроса для линейного спроса: это отношение нижнего отрезка по оси цен (который равен, собственно, цене в необходимой точке), к верхнему отрезку (который равен разнице между максимальной ценой и ценой в точке).

Также хочу заметить, что по теореме Фалеса выполняются эластичность можно выражать и через отношение других отрезков:

$$E_D^P = -\frac{|DO|}{|AD|} = -\frac{|BC|}{|CA|} = -\frac{|BE|}{|EO|}$$

Также отношение отрезков можно получить и аналитическим методом. Запишем функцию спроса как $P = a - bQ$ (Таким образом, максимальная цена спроса - a). Перевыразим Q, чтобы можно было найти производную функции:

$$Q = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}P$$

Выразим эластичность в точке с помощью коэффициента эластичости:

$$E_D^P = Q'_P * \frac{P}{Q} = -\frac{1}{b} * \frac{P}{Q} = -\frac{1}{b} * \frac{P}{\frac{a}{b} - \frac{1}{b}P} = -\frac{1}{b} * \frac{bP}{a - P} = -\frac{P}{a - P}$$

Таким образом, мы получили, что эластичность линейного спроса по цене по модулю равна отношению цены к разнице макмальной цены и цены в точке (то же самое, что мы и получили раньше).

Из всего вышеперечисленного можно вывести несколько следствий:

1. Чем выше точка на линейном спросе, тем большей эластичностью она обладает.
2. В середине спроса эластичность в точности равна (-1).
3. На концах спроса эластичность равна 0 и $-\infty$ соответственно.

Геометрический смысл эластичности линейного предложения

Теперь найдем похожее соотношение отрезков для предложения. Посмотрите на график:

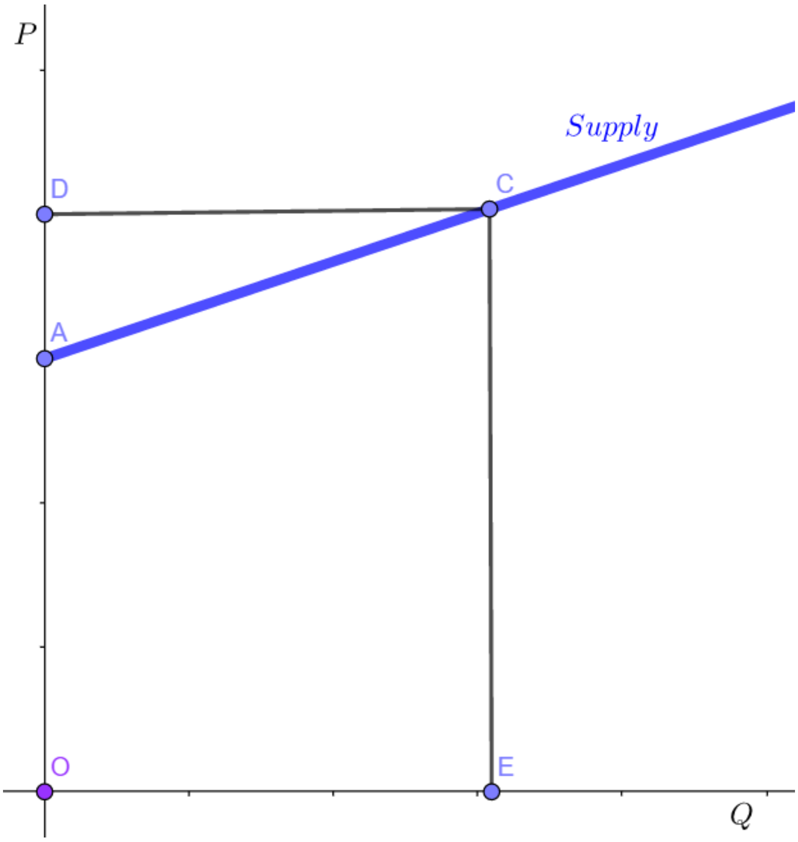


Рис. 106: Геометрический смысл эластичности спроса

Нашей задачей является рассчитать эластичность данного предложения по цене в точке C.

Выразим все компоненты эластичости в виде отрезков. В качестве второй точки возьмем точку A:

$$\Delta Q = |OE|$$

$$\Delta P = |AD|$$

$$Q = |OE|$$

$$P = |OD|$$

$$E_S^P = \frac{\Delta Q}{\Delta P} * \frac{P}{Q} = \frac{|OE|}{|AD|} * \frac{|OD|}{|OE|} = \frac{|OD|}{|AD|}$$

Получается, что эластичность предложения по цене оказалась равна отношению цены к разнице между ценой и минимальной ценой предложения.

Обратите внимание на несколько следствий из полученного утверждения:

1. Если линейное предложение выходит выше начала координат, то оно эластично в любой точке ($E_S^P > 1$), так как $|OD| > |AD|$.
2. Если линейное предложение выходит ниже начала координат, то оно неэластично в любой точке ($E_S^P < 1$), так как $|OD| < |AD|$.
3. Если линейное предложение выходит из начала координат, то оно обладает единичной эластичностью в любой точке ($E_S^P = 1$).

4. Чем выше точка на эластичном предложении, тем меньше значение эластичности в этой точке. Чем выше точка на неэластичном предложении, тем больше значение эластичности в этой точке.

   Этот факт является следствием того, что если мы увеличиваем координату точки по оси цен, то в дроби, обозначенной выше (там это было $\frac{|OD|}{|AD|}$) и к числителю, и к знаменателю прибавляется одно и то же число, из-за чего дробь становится ближе к единице. Если предложение эластично ($E_S^P > 1$), то эластичность уменьшается, так как становится ближе к единице. Если предложение неэластично ($E_S^P < 1$), то эластичность увеличивается при приближении к единице

Если вам все еще непонятно, посмотрите на следующий график, это ваш последний шанс:

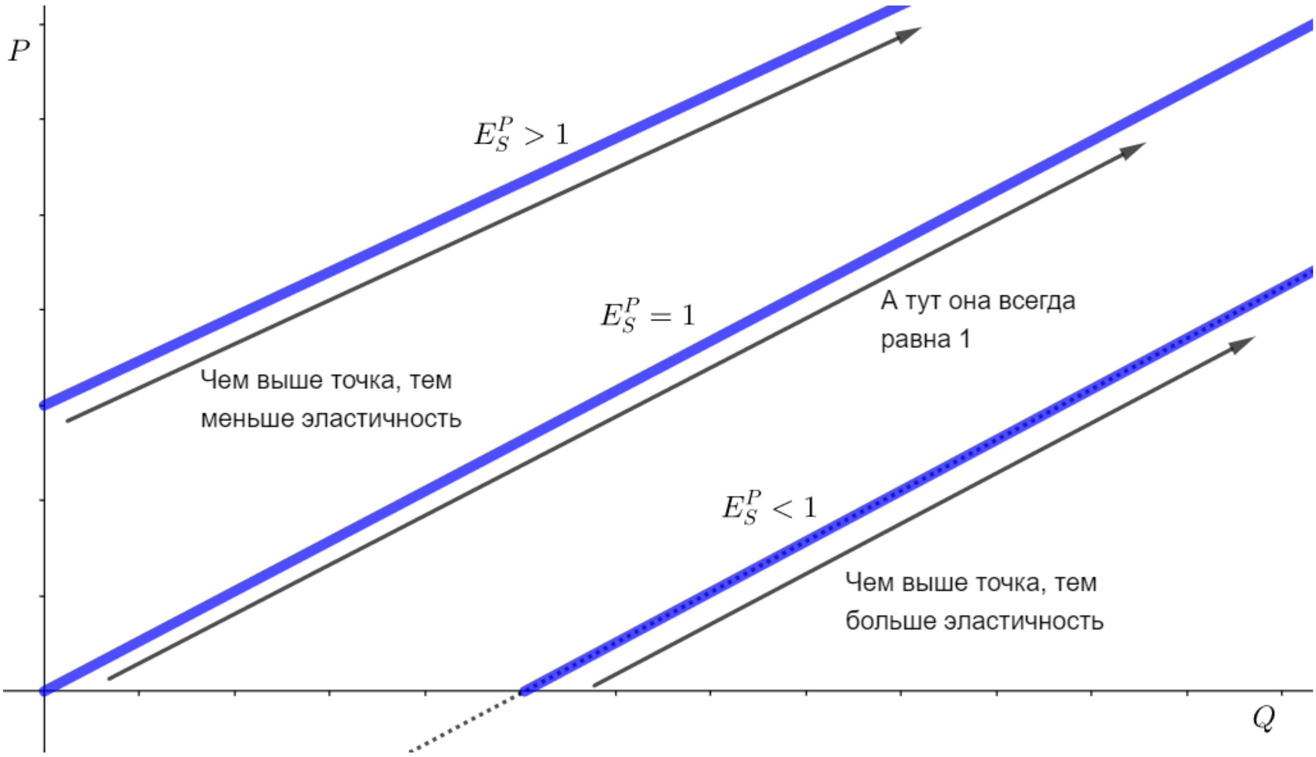


Рис. 107: Эластичности линейных предложений

Интересные факты про эластичность

Эластичность по цене и налоговое бремя

При введении любого налога из трех (потоварный, акциз, НДС) на рынок совершенной конкуренции с линейными функциями спроса и предложения, отношение налогового бремени потребителя и производителя обратно пропорционально отношению модуля эластичности предложения и спроса про цене в точке изначального равновесия. Здесь нужно вспомнить, что налоговое бремя потребителя - это то, на сколько увеличилась цена потребителя в результате введения налога, а налоговое бремя производителя - то, на сколько снизилась цена производителя.

То же самое в виде формулы:

$$\frac{t_d}{t_s} = |\frac{E_S^P}{E_D^P}|$$

Этот факт уже несколько раз использовался в задачах на различных этапах ВСОШ, так что настоятельно советую запомнить.

Для особо интересующихся приведу аналитическое доказательство:
Зададим спрос и предложение аналитически:

$$Q_d = a - bP_d$$

$$Q_s = c + dP_s$$

Так как налоги эквивалентны, рассмотрим на примере и введем потоварный налог. Он изменит функцию предложения, после чего найдем равновесную цену потребителя и производителя.

$$P_s = P_d - t$$

$$Q_s = c + dP_s = c + d(P_d - t)$$

$$a - bP_d = c + d(P_d - t)$$

$$a - c + dt = bP_d + dP_d$$

$$P_d = \frac{a - c + dt}{b + d}$$

$$P_s = P_d - t = \frac{a - c - bt}{b + d}$$

Изначальное равновесие было при $t = 0$. Найдем равновесную цену до налога:

$$P^* = \frac{a - c}{b + d}$$

Тогда найдем t_s и t_d - на сколько уменьшилась цена производителя и увеличилась цена потребителя при введении налога соответственно:

$$t_s = P^* - P_s = \frac{a - c}{b + d} - \frac{a - c - bt}{b + d} = \frac{bt}{b + d}$$

$$t_d = P_d - P^* = \frac{a - c + dt}{b + d} - \frac{a - c}{b + d} = \frac{dt}{b + d}$$

Тогда можно получить соотношение налогового бремени потребителя и производителя:

$$\frac{t_d}{t_s} = \frac{\frac{dt}{b+d}}{\frac{bt}{b+d}} = \frac{d}{b}$$

Теперь рассмотрим эластичности. Если P^* и Q^* - равновесные значения цены и количества до введени налога. Тогда:

$$\frac{E_S^P}{E_D^P} = \frac{Q_s'(P^*) * \frac{P^*}{Q^*}}{Q_d'(P^*) * \frac{P^*}{Q^*}} = \frac{Q_s'(P^*)}{Q_d'(P^*)} = \frac{d}{-b}$$

Наконец, получаем:

$$|\frac{E_S^P}{E_D^P}| = |\frac{d}{-b}| = \frac{d}{b} = \frac{t_d}{t_s}$$

Что мы и хотели получить.

Эластичность спроса по цене и эластичность выручки по цене

Сейчас мы с вами посмотрим на то, как эти эластичность количества по цене и эластичность выручки по цене соотносятся между собой и что из этого следует (тут вспоминаем, что $TR = PQ$). Данное соотношение будет верно для любой функции спроса $Q = f(P)$.

$$E^P_{TR} = TR'_{(P)} * \frac{P}{TR} = (P * Q(P))'_P * \frac{P}{PQ} = \frac{(P * Q(P))'_P}{Q}$$

Так как у нас и P зависит от P, и Q зависит от P, применим формулу производной произведения:

$$E^P_{TR} = \frac{(P * Q(P))'_{(P)}}{Q} = \frac{Q(P) + P * Q'_{(P)}}{Q} = 1 + \frac{P * Q'_{(P)}}{Q} = 1 + Q'_{(P)} * \frac{P}{Q} = 1 + E^P_D$$

Таким образом, мы получили, что **эластичность выручки по цене всегда на 1 больше эластиности спроса по цене**.

Из этого следует довольно много всего. Итак, по порядку:

1. Если спрос эластичен (эластичность по модулю больше 1, а по факту меньше -1), то эластичность выручки по цене будет отрицательна ($E^P_D < -1 \rightarrow E^P_{TR} = E^P_D + 1 < 0$). Это значит, что если спрос эластичен, то при повышении цены выручка уменьшится.

2. Аналогично, если спрос неэластичен, то при увеличении цены выручка увеличится.

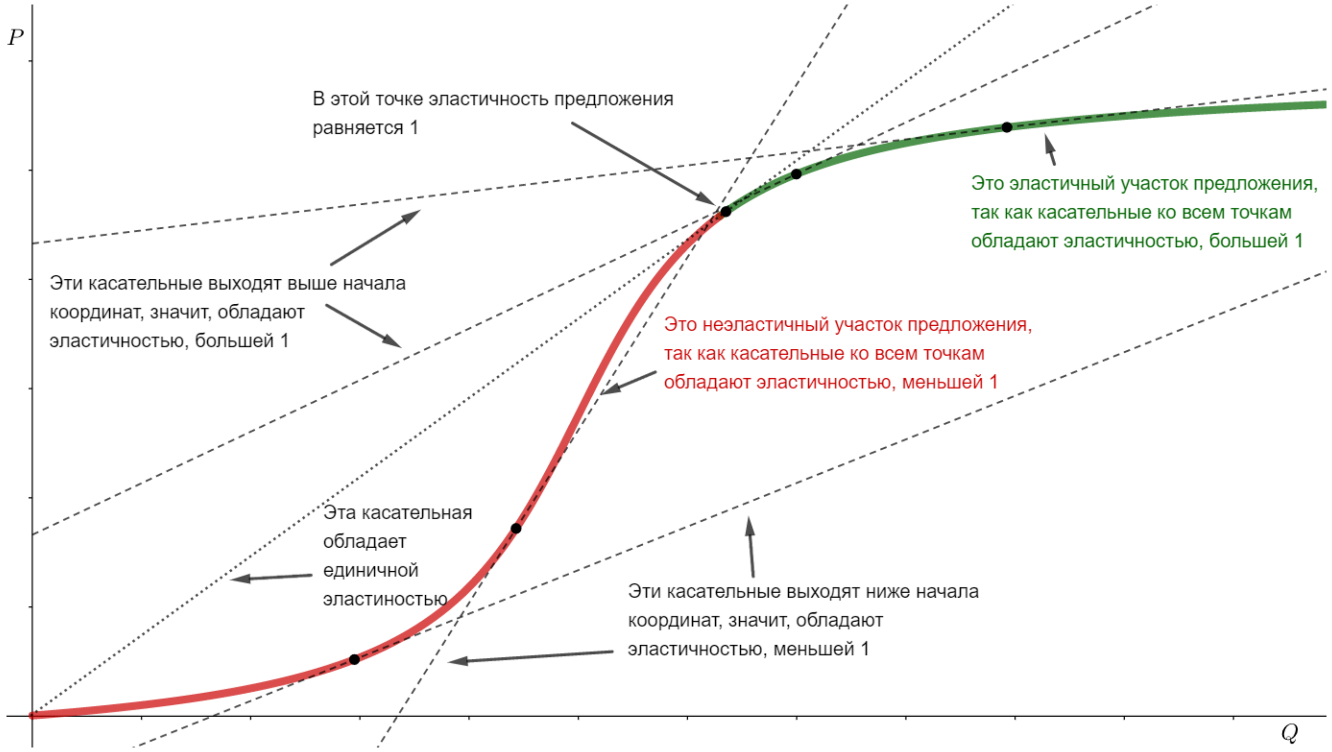
3. Монополист всегда будет работать на эластичном участке спроса. Если он работает на неэластичном участке, он может увеличить цену, уменьшив продаваемое количество. Таким образом он увеличит выручку (так как спрос неэластичен) и уменьшит издержки (так как уменьшит количество) и в результате его прибыль вырастет. Получается, никакая точка на неэластичном участке спроса не будет оптимумом.

Эластичность нелинейных функций

Есть одно простое, но очень полезное правило:

Эластичность функции в точке равна эластичности касательной к этой функции в этой точке, так как у функции и у касательной по определению совпадают и f'_x, и f, и x (В случае эластичности количества от цены у них совпадают и Q'_P, и Q, и P).

Например, так можно определять эластичные и неэластичные участки некоторых функций. В том числе, вот этого странного предложения, представленного в виде графика:



В этой точке эластичность предложения равняется 1

Это эластичный участок предложения, так как касательные ко всем точкам обладают эластичностью, большей 1

Эти касательные выходят выше начала координат, значит, обладают эластичностью, большей 1

Это неэластичный участок предложения, так как касательные ко всем точкам обладают эластичностью, меньшей 1

Эта касательная обладает единичной эластичностью

Эти касательные выходят ниже начала координат, значит, обладают эластичностью, меньшей 1

Рис. 108: Эластичность нелинейного предложения

Функции с постоянной эластичностью

Как вы могли уже много раз заметить, в различных точках функция может иметь различные значения эластичности. Однако, существует один класс функций, для которых эластичность постоянна на всей области определения. Другими словами, какую бы точку на такой функции вы бы не взяли, эластичность будет всегда одинакова.

Для удобства я буду писать функции в терминах $Q = f(P)$, однако, это распространяется вообще на все функции $f(x)$. Собственно, функции следующего вида обладают постоянной эластичность:

$$Q = a * P^n$$

Здесь a и n - некоторые параметры. a обычно называют наклоном функции, а n - степенью. Чему же равна эластичность такой функции? Посчитаем:

$$E_Q^P = Q'_P * \frac{P}{Q} = a * n * P^{n-1} * \frac{P}{a * P^n} = \frac{a * n * P^n}{a * P^n} = n$$

Да, эластичность таких функция всегда равна показателю степени и не зависит ни от наклона функции (a), ни от того, какую точку мы выберем.

Например, предложение $Q = 6P$ будет обладать постоянной эластичностью, равной 1. Или же спрос вида $Q = \frac{100}{P^2} = 100 * P^{-2}$ будет обладать постоянной эластичностью, равной -2.

Эластичность в теории потребителя и классификация товаров

Мы уже ознакомились с эластичностью на рынке совершенной конкуренции, на которую дают большинство задач в олимпиадной экономике. Теперь мы с вами посмотрим на эластичность в теории потребителя, на которую любят давать тестовые вопросы.

Эластичность спроса по доходу

Эластичность спроса по доходу (E_D^I) помогает нам определить, каким именно товаром для индивида является какое-то конкретное благо. Всего выделяют 3 вида товаров:

1. **Инфериорные товары**, они же товары низкого качества. Это такие товары, потребление которых мы **уменьшаем** при увеличении нашего дохода, то есть эластичность нашего спроса по доходу на которые меньше 0 ($E_D^I < 0$). К таким товарам можно отнести, например, дешевые консервы, а также другие некачественные и дешевые продукты. Чем выше доход индивида, тем меньше он их покупает.

2. **Товары первой необходимости**. Это товары, эластичность спроса по доходу на которые неотрицательна, но меньше 1 ($0 \leqslant E_D^I < 1$). То есть это такие товары, потребление которых мы не сильно увеличиваем с ростом дохода. Например, сюда можно отнести зубную пасту, хлеб и другие повседневные вещи.

3. **Товары роскоши**. Эта группа товаров характеризуется высокой эластичностью спроса по доходу ($E_D^I > 1$). К таким товарам можно отнести квартиры, машины и множество других вещей.

Товары первой необходимости и Товары роскоши называются **нормальными** товарами.

Давайте, для примера, попробуем определить, к какой категории товаров относится какое-либо благо в конкретной задаче.

Допустим, мы рассматриваем индивида, обладающего функцией полезности $U = xy + 10x$, и располагающего бюджетом в $I = 100$ д.е. Цены товаров равны $P_x = 10$, $P_y = 5$. Нашей задачей будет определить, к какой категории товаров относится для нашего индивида товар x.

Для этого нам необходимо понять, как именно потребление товара x зависит от нашего дохода I, то есть решить задачу, принимая I за параметр.

Итак, индивид максимизирует полезность при бюджетном ограничении $10x+5y = I$ (равенство достигается, так как полезность строго возрастает по x, то есть индивид точно будет тратить все деньги). Сократив, получим $y = \frac{I}{5} - 2x$.

Будем решать задачу через максимизацию основной функции:

$$U = xy + 10x = x(\frac{I}{5} - 2x) + 10x = (\frac{I}{5} + 10)x - 2x^2 \xrightarrow{x} max$$

Это парабола ветвями вниз, ищем вершину:

$$x^* = \frac{\frac{I}{5} + 10}{4} = \frac{I + 50}{20}$$

Проверяем на ограничения $x \geqslant 0$ и $x \leqslant \frac{I}{10}$:
$\frac{I+50}{20} \geqslant 0$ при любых I. Проверяем второе.

$$\frac{I + 50}{20} \leqslant \frac{I}{10}$$
$$I + 50 \leqslant 2I$$
$$50 \leqslant I$$

Нас удовлетворяет такое соотношение, так как нужно узнать эластичность в точке $I = 100$. Таким образом, мы нашли зависимость x от I: $x^* = \frac{I+50}{20} = \frac{I}{20} + \frac{5}{2}$. Теперь высчитаем эластичность спроса по доходу:

$$E_x^I = x_I' * \frac{I}{x} = \frac{1}{20} * \frac{100}{\frac{100}{20} + \frac{5}{2}} = \frac{5}{\frac{15}{2}} = \frac{2}{3}$$

Получается, что $E_x^I < 1$, следовательно, x - товар первой необходимости.

Перекрестная эластичность спроса

Другая классификация товаров основана на их взаимосвязи друг с другом. Эту взаимосвязь позволяет выявить **перекрестная эластичность спроса** - эластичность спроса на один товар по цене **другого** товара. Всего в такой классификации также существует 3 вида товаров:

1. **Товары-комплементы** - это дополняющие друг друга товара. Например, зубная щетка и зубная паста. Такие товары характеризуются **отрицательной** перекрестной эластичностью: чем дороже один из товаров-комплементов, тем меньше нам хочется потреблять второй.
2. **Товары-субституты**, или товары-заменители. Они отличаются **положительной** перекрестной эластичностью, так как при увеличении цены на один товар мы увеличиваем потребление второго.
3. **Нейтральные товары** - это те товары, которые никак между собой не связаны. Их перекрестная эластичность равняется 0.

Рассмотрим пример задачки на перекрестную эластичность: Допустим, нам нужно определить, как связаны между собой два товара, которые потребляет индивид. Его полезность от этих товаров описывается функцией $U = 10x - x^2 + y$, $P_x = 5$, $P_y = 1$, $I = 40$. Для того, чтобы понять, какие это товары, нам нужно посчитать либо перекрестную эластичность x по цене y, либо наоборот. Я буду считать перекрестную эластичность x по цене y. Для того, чтобы посчитать данную эластичность, нам необходимо принять P_y за константу.

Бюджетное ограничение имеет вид $yP_y + 5x = 20$, или же $y = \frac{40}{P_y} - \frac{5}{P_y}x$. Равенство выполняется так как полезность возрастает по y. Промаксимизируем полезность методом основной функции:

$$U = 10x - x^2 + y = 10x - x^2 + \frac{40}{P_y} - \frac{5}{P_y}x = (10 - \frac{5}{P_y})x - x^2 + \frac{40}{P_y} \xrightarrow{x} max$$

Это парабола ветвями вниз. Ищем вершину:

$$x^* = \frac{10 - \frac{5}{P_y}}{2} = 5 - \frac{5}{2P_y}$$

Проверим на ограничения $x \geqslant 0$ и $x \leqslant \frac{40}{5}$. Можно сразу же проверять в нашей точке, подставив $P_y = 1$. Тогда $x^* = 5 - \frac{5}{2P_y} = \frac{5}{2}$. Оба ограничения выполняются: $0 \leqslant \frac{5}{2} \leqslant 8$.

Значит, мы правильно нашли зависимость. Теперь высчитаем нужную нам перекрестную эластичность:

$$E_x^{P_y} = x'_{P_y} * \frac{P_y}{x} = \frac{5}{2P_y^2} * \frac{P_y}{x} = \frac{5 * 1}{2 * 1 * \frac{5}{2}} = 1$$

Получили, что перекрестная эластичность положительна, значит, x и y - товары-субституты.

Товары Гиффена

Товары Гиффена - особая категория инфериорных товаров. Это такие товары, спрос на которые имеет **положительную** эластичность по цене. Другими словами, чем больше цена товара, тем больше величина спроса на данный товар. Графически, в присутствии эффекта Гиффена, наклон спроса становится **положительным**.

Данный парадокс имеет место в условиях довольно низкого дохода индивида, когда на кону стоит не благополучие, а выживание. Практически всегда в качестве иллюстрации товаров эффекта Гиффена приводят доступную еду (хлеб, чай, рис) в условиях экономического кризиса.

Эффект наблюдается из-за того, что эффект замещения оказывается слабее эффекта дохода: при росте цены на жизненно необходимый продукт людям в условиях нищеты приходится отказываться от других, более качественных продуктов, заменяя их этим самым жизненно необходимым продуктом.

Альтернативные издержки и КПВ

Итак, мы с вами переходим к последней, довольно объемной теме в олимпиадной экономике. Практически на каждой олимпиаде есть задача на КПВ, и эта тема является одной из самых важных во всем курсе. Несмотря на то, что задачи на КПВ самые разнообразные, между ними существует много общего. Здесь я постараюсь разобрать базовую теорию по всем темам.

Понятия альтернативных издержек и КПВ

Для начала ознакомимся с некоторыми ключевыми определениями.

Альтернативные издержки какого-либо блага - это то, что можно получить, отказавшись от этого блага. Альтернативные издержки никогда не выражаются в денежных единицах. Стандартное сокращение - *OC* (*Opportunity Costs*).

В качестве иллюстрации рассмотрим магазин, в котором ручка стоит 10 рублей, а карандаш - 5 рублей. Тогда в этом магазине вместо одной ручки можно купить 2 карандаша. Другими словами, отказавшись от покупки ручки, мы сможем приобрести 2 карандаша. В таком случае говорят, что альтернативные издержки ручки равны двум карандашам. и наоборот, альтернативные издержки карандаша составляют половину ручки.

Или же один рабочий за смену может изготовить 3 гайки или 4 шурупа. В таком случае альтернативные издержки 3 гаек равны 4 шурупам, а альтернативные издержки одной гайки равны $\frac{4}{3}$ шурупа.

МПВ - Множество Производственных Возможностей. Обычно это именно Производственные возможности, но могут быть и Покупные (например, сколько ручек и карандашей мы можем купить), Утилизационные, Вытащенные, Принесенные - в общем, любые. Но исторически мы будем говорить «Производсвтенные возможности» для любых возможностей.

Например, рассмотрим ситуацию, в которой мы пришли в магазин со 100 рублями, а там ручки стоят по 10 рублей, а карандаши - по 5 рублей. Набор из 5 ручек и 10 карандашей будет входить в наше МПВ, набор из 15 карандашей также будет туда входить, а вот набор из 10 ручек и 1 карандаша туда входить уже не будет, так как нам не хватит денег.

КПВ - Кривая Производственных (Покупных, Утилизационных, Вытащенных, Принесенных и т.д.) Возможностей. С этим понятием есть небольшая проблема, так как в различных олимпиадах жюри давало различные определения КПВ, в результате чего различные ответы считались правильными. Чтобы не запутать вас, я советую использовать официальное определение жюри муниципального этапа города Москвы 2017 года: **КПВ** - множество наборов товаров, которые можно получить (произвести, купить и т.д.), **полно и максимально эффективно используя все доступные ресурсы**. Под эффективностью подразумевается, что мы не можем увеличить количество одного товара, не уменьшив количества другого.

Практически во всех задачах на КПВ вам придется рисовать графики, собственно, этих самых КПВ. Все графики КПВ рисуются в координатах товаров, которые мы можем получить. Рассмотрим на примере, что это вообще за графики.

Допустим, в рассматриваемой нами задаче, где у нас есть 100 рублей, ручка стоит 10, а карандаш - 5, нашим ограничением является $10 * r + 5 * k \leqslant 100$, где r - количество ручек, а k -

количество карандашей. КПВ же будет иметь уравнение $10 * r + 5 * k = 100$, так как КПВ показывает наборы при **полном** распределении ресурсов. Нарисуем получившиеся множества в координатах ручки-карандаши:

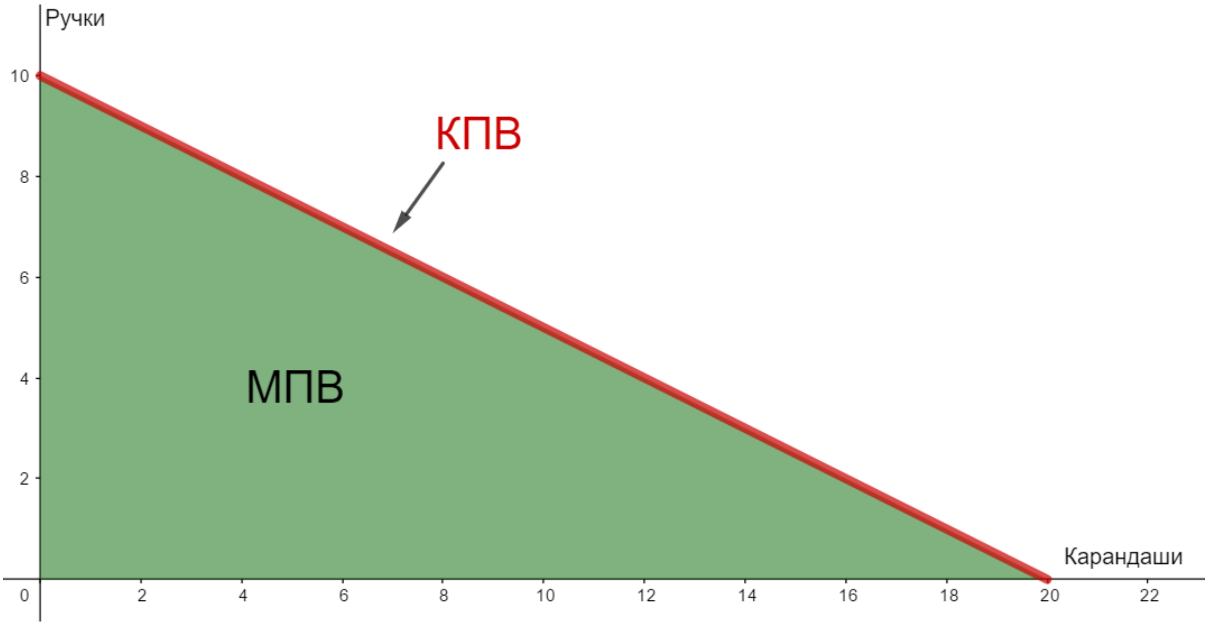


Рис. 109: МПВ и КПВ.

Для более точной демонстрации свойства КПВ как **полного и максимально эффективного** использования ресурсов, рассмотрим следующее МПВ, которое вполне могло бы получиться при решении одной из не очень простых задач:

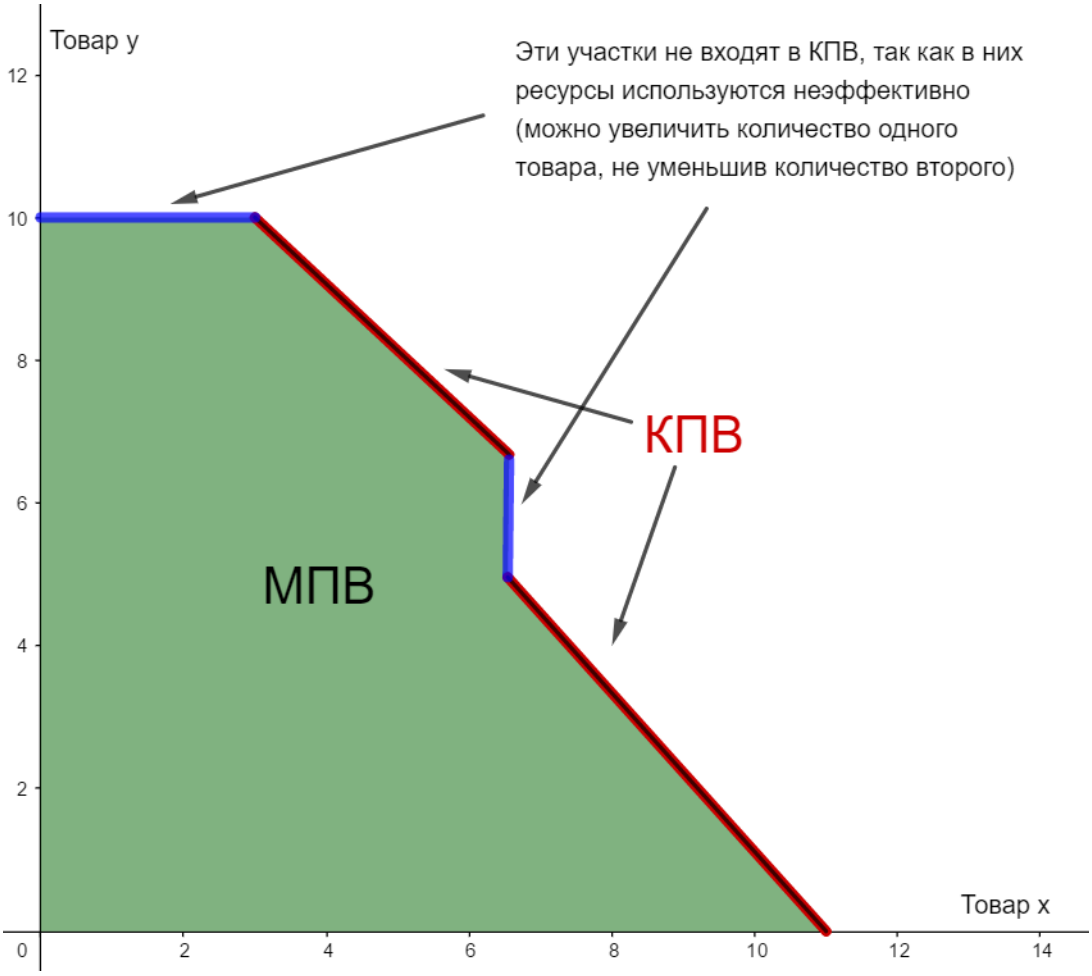


Рис. 110: Неочевидное КПВ.

Теперь немного о том, как альтернативные издержки связаны с КПВ и как определить их, имея только график. Альтернативные издержки товара x (OC_x) показывают, сколько единиц товара y мы можем получить, отказавшись от 1 единицы x. Так как товары в экономике бесконечно делимы, то OC_x обозначают, во сколько раз больше y мы получим, чем x, которое мы потратим, то есть величину $-\frac{\Delta y}{\Delta x}$. «Минус» перед дробью стоит потому что мы теряем товар, чтобы произвести новый, а альтернативные издержки положительны.

Теперь, если вы знаете математическое определение производной, то можете заметить, что мы получили просто отрицательную производную, то есть:

$$OC_x = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -y'_x$$

Что же такое y'_x? Это производная зависимости y от x, то есть нашего КПВ. Таким образом, мы можем воспользоваться геометрическим свойством производной и считать тангенс наклона с осью X. Так как тангенсы смежных углов противоположны, то OC_x нам покажет угол, смежный с положительным направление оси. Все это также будет верно и в другую сторону, то есть для y и его альтернативных издержек, то есть $OC_y = -x'_y$ Рассмотрим иллюстрацию всего того, что я сейчас понаписал:

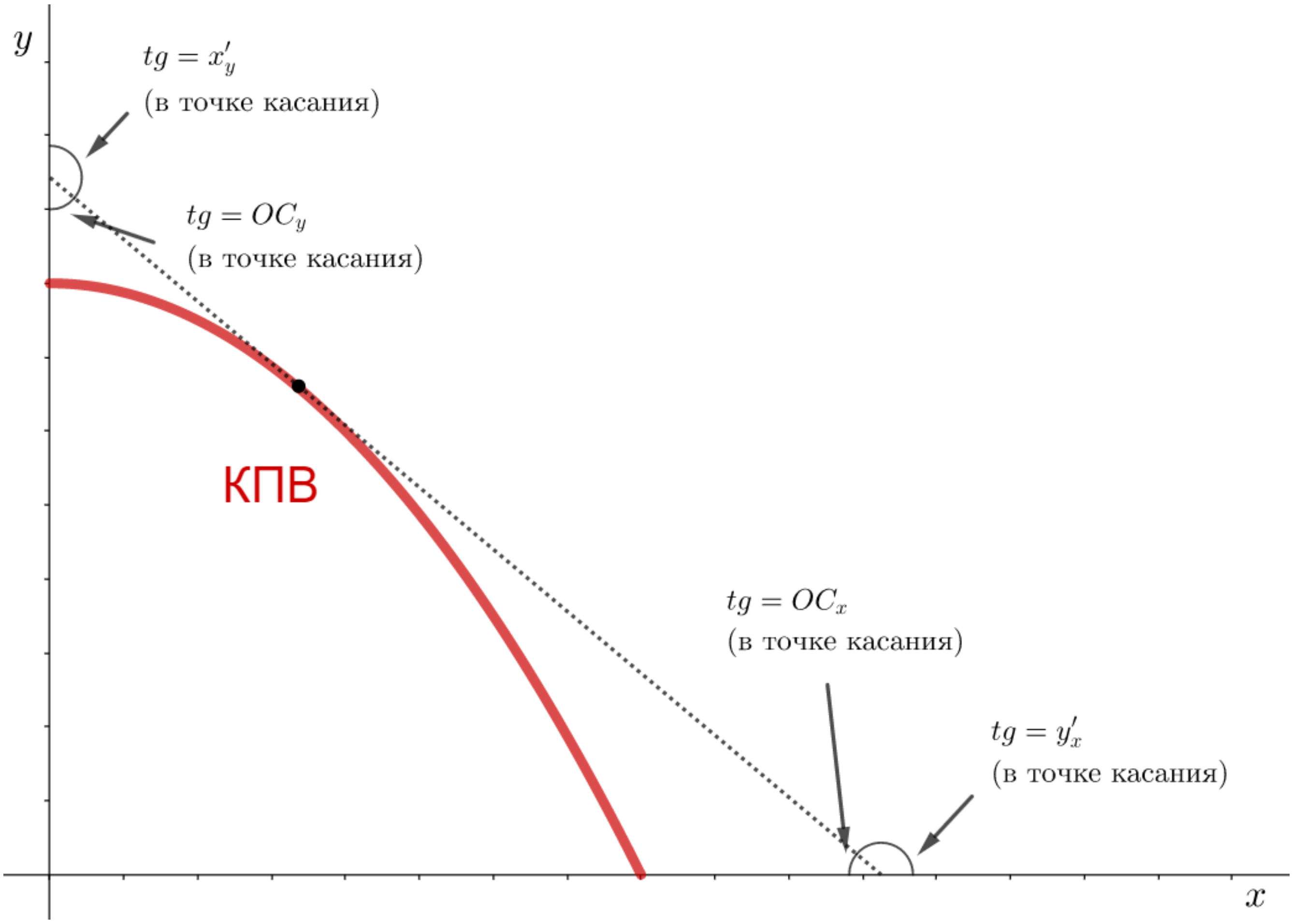


Рис. 111: Геометрический смысл альтернативных издержек.

Как вы можете заметить, для разных точек наклоны касательных разные, так что в каждой точке будет свое значение альтернативных издержек.

Отсюда же следует, что, так как **линейная** КПВ в каждой имеет одинаковую касательную, то и альтернативные издержки на линейной КПВ будут всегда постоянными. В общем, если в задаче написано, что альтернативные издержки постоянны, то это обозначает линейную КПВ.

Построение КПВ

Первое, чему мы научимся - это строить КПВ. Запоминаем самое главное правило в построении: **КПВ всегда получается из какого-то ограничения**. Если ограничения нет, то, в принципе, возможно все. Это довольно важное правило, которым мы всегда будем пользоваться в построении КПВ.

Например, в предыдущей задаче с ручками и карандашами нашим ограничением были 100 рублей, имеющиеся в наличии, и, выписав наше ограничение в явном виде, мы тут же получили функцию КПВ.

Рассмотрим стандартный пример построения КПВ. Допустим, у нас есть 2 товара: X и Y. Для производства данных товаров нам требуется труд. Соответственно, известно, как именно производятся товары, то есть производственные функции данных товаров: $x = 4\sqrt{L_x}$, $y = 2L_y$. Соответственно, L_x - количество труда, которое используется в производстве x, а L_y - количество труда, используемое в производстве y. Всего в наличии имеется 200 единиц труда, то есть $L = 200$. Задачей будет построить наше КПВ в координатах $x - y$.

Для того, чтобы построить КПВ необходимо понять, что нам нужно получить. Нам нужно получить какое-то уравнение, связывающее x и y, а также отражающее наше ограничение. Собственно, задачей будет преобразовать ограничение $L = 200$ так, чтобы оно не содержало L и содержало x и y.

Будем расписывать наше ограничение, пока не добъемся результата:

$$L = 200$$
$$L_x + L_y = 200$$

Далее, мы можем выразить L_x и L_y через x и y с помощью производственных функций:

$$x = 4\sqrt{L_x} \qquad y = 2L_y$$
$$L_x = \frac{x^2}{16} \qquad L_y = \frac{y}{2}$$

Заменим все слагаемые в ограничении:

$$L_x + L_y = 200$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y}{2} = 200$$

Мы получили связь между нашими товарами. Эта зависимость уже описывает нужную нам КПВ. Чтобы мы могли построить данную зависимость на графике, стоит выписать ее в виде функции, то есть выразить y в зависимости от x:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y}{2} = 200$$
$$y = 400 - \frac{x^2}{8}$$

Это стандартная парабола ветвями вниз. Можем изобразить ее на графике:

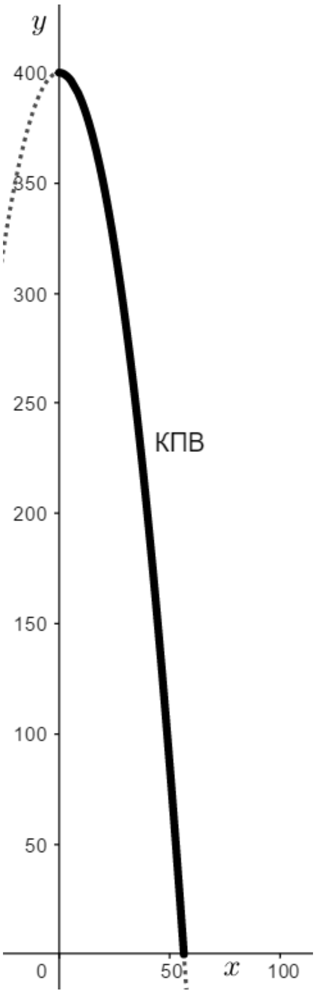


Рис. 112: Итоговая КПВ.

Построение КПВ с несколькими ограничениями

Процесс построения КПВ с несколькими ограничениями не особо отличается от обычного построения. Разница лишь в том, что эти ограничения нужно в итоге правильно учесть.

Сразу же рассмотрим пример задачи:

У строителей имеется 320 досок (d) и 350 кирпичей (k). Строители умеют изготавливать три продукта. Для кирпичной печи (p) им необходимо 20 кирпичей. Для одноэтажного дома (x) им необходимы печь, 40 кирпичей и 40 досок. Для двухэтажного дома (y) им необходимы печь, 50 кирпичей и 80 досок. Нам необходимо построить их КПВ в координатах одноэтажный дом (x) - двухэтажный дом (y).

Итак, вспоминаем, что любая КПВ берется из ограничений. У нас их два:

$$d \leqslant 320$$

$$k \leqslant 350$$

Как и с прошлой задаче, нам нужно в этих ограничениях избавиться от d и k и внести туда x и y. Попробуем это сделать. Сначала разберемся с первым ограничением.

Итак, на что мы расходуем доски? Только на дома. Нам нужно в 40 раз больше досок, чем у нас будет одноэтажных домов, да еще и в 80 раз больше досок, чем у нас будет двухэтажных домов. Итого всего досок $d = 40x + 80y$. Подставим это в наше ограничение и получим первое ограничение, выраженное строго черех x и y:

$$d = 40x + 80y \leqslant 320$$

Теперь то же самое сделаем со вторым ограничечичением:

Кирпичи мы расходуем на печи и оба типа домов. Необходимое нам количество кирпичей можно выразить следующим образом:

$$k = 20p + 40x + 50y$$

Подставим в ограничение:

$$k = 20p + 40x + 50y \leqslant 350$$

Однако, здесь остались еще и печи, от которых нужно избавиться, выразив через x и y. Мы знаем сколько печей нам нужно: по одной в каждый дом. Итого, $p = x + y$. Заменим, и получим второе ограничение:

$$20p + 40x + 50y \leqslant 350$$

$$20x + 20y + 40x + 50y \leqslant 350$$

$$60x + 70y \leqslant 350$$

Теперь мы можем, например, выразить эти ограничения в виде функций, чтобы их было проще построить:

$$40x + 80y \leqslant 320 \qquad\qquad 60x + 70y \leqslant 350$$

$$y \leqslant 4 - \frac{x}{2} \qquad\qquad y \leqslant 5 - \frac{6}{7}x$$

Так как **оба** ограничения должны одновременно выполняться, то мы будем брать их пересечение. На графике это выглядит как наложение МПВ. В таком случае говорится, что КПВ будет являться **нижней огибающей** наших ограничений, то есть линией, огибающей итоговое МПВ. Посмотрите на иллюстрацию:

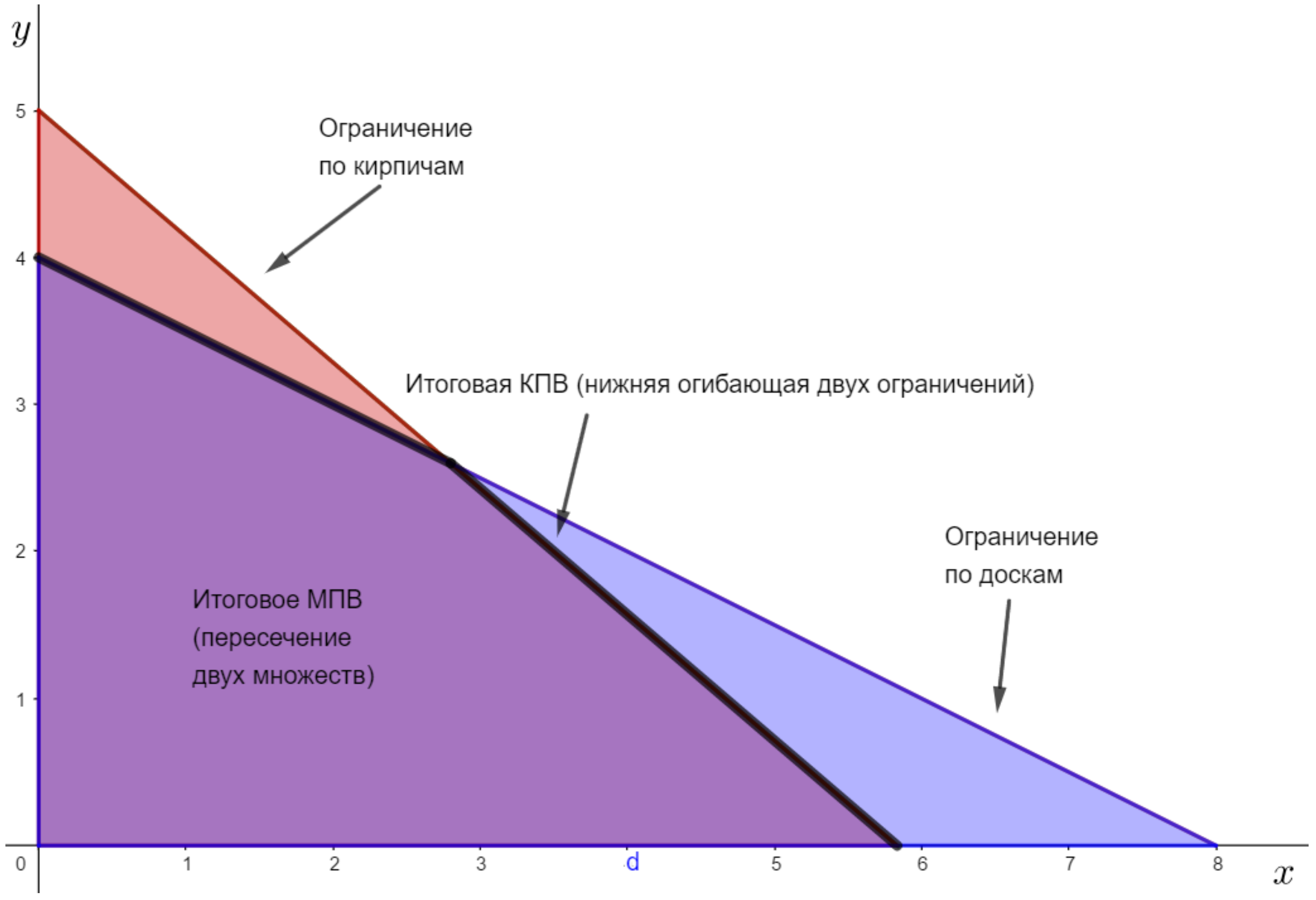


Рис. 113: КПВ с двумя ограничениями.

Сложение КПВ

Иногда в распоряжении агента может быть несколько полей/заводов/магазинов, каждый из которых обладает своим КПВ, а агенту интересно знать его общие возможности. Сложение КПВ - довольно популярная тема в олимпиадных задачах. По привычке я буду называть КПВ, которые мы складывем, **полями**.

Задачи на сложение КПВ являются **оптимизационными задачами**, так в них всегда нужно выбирать, какой товар и в каком количестве производить на каждом поле для того, чтобы эффективно использовать эти поля.Как и все остальные оптимизационные задачи в олимпиадной экономике, задачи на сложение КПВ имеют несколько методов решения (включая один уникальный для данной темы способ). Рассмотрим их все по очереди.

Сложение КПВ прямой оптимизацией основной функции (в лоб)

Допустим, нам нужно сложить две следующие КПВ:

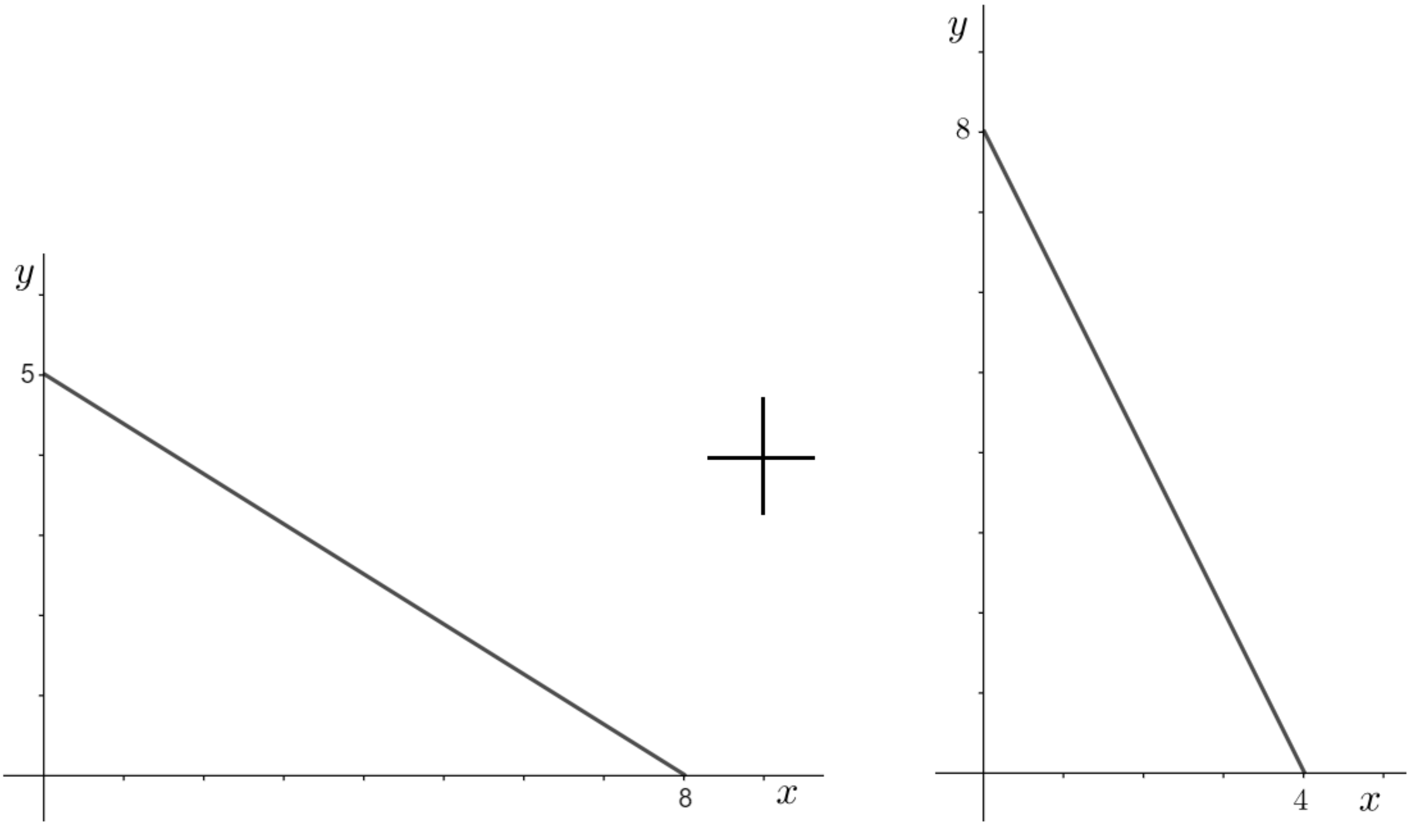


Рис. 114: Сложение КПВ.

Для сложения с помощью максимизации, нам нужно записать функции обеих КПВ:

$$y_1 = 5 - \frac{5}{8}x_1$$
$$y_2 = 8 - 2x_2$$

Теперь, мы произведем y_1 на первом поле и y_2 на втором. Тогда выпишем суммарное количество товара y:

$$y = y_1 + y_2 = 5 - \frac{5}{8}x_1 + 8 - 2x_2$$

Так как КПВ отражает максимальное количество одного товара при фиксированном значении второго, мы будем максимизировать y при фиксированном значении x (можно и наоборот, конечно же). Сейчас мы должны выбрать такие x_1 и x_2 в зависимости от x, чтобы итоговый y оказался максимальным. Так как все эти переменные связаны ($x = x_1 + x_2$), заменим одну переменную:

$$x_2 = x - x_1$$
$$y = 5 - \frac{5}{8}x_1 + 8 - 2x_2 = 5 - \frac{5}{8}x_1 + 8 - 2(x - x_1) = 13 - 2x + \frac{11}{8}x_1 \xrightarrow{x_1} max$$

Выбрав, какое количество x отправить на первое поле, мы получим оптимальное распределение x по полям. Данная функция возрастает по x_1. Следовательно, для ее максимизации нам просто нужно взять максимальный x_1. А для этого нам нужно знать все ограничения на x_1. Выпишем все ограничения из условия:

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 8$$
$$0 \leqslant x_2 \leqslant 4$$

Так как мы выражали x_2 через x_1 ($x_2 = x - x_1$), то ограничения на x_2 переходят и на x_1:

$$0 \leqslant x - x_1 \leqslant 4$$

$$x - 4 \leqslant x_1 \leqslant x$$

Так как нас интересует максимальный x_1, то нам нужны только ограничения сверху:

$$x_1 \leqslant 8$$

$$x_1 \leqslant x$$

Теперь, если $x > 8$, то верхнее ограничение оказывается строже, а если $x \leqslant 8$ - то нижнее. Так как нужен максимальный x_1, мы возьмем одно из этих ограничений (в зависимости от того, какое строже):

$$\begin{cases} x_1 = 8 & x > 8 \\ x_1 = x & x \leqslant 8 \end{cases}$$

Подставим найденный оптимальный x_1 его обратно в функцию:

$$y = 13 - 2x + \frac{11}{8}x_1 = \begin{cases} 13 - 2x + \frac{11}{8} * 8 & x > 8 \\ 13 - 2x + \frac{11}{8} * x & x \leqslant 8 \end{cases} = \begin{cases} 24 - 2x & x > 8 \\ 13 - \frac{5}{8}x & x \leqslant 8 \end{cases}$$

Изобразим данную кусочную функцию на графике и готово:

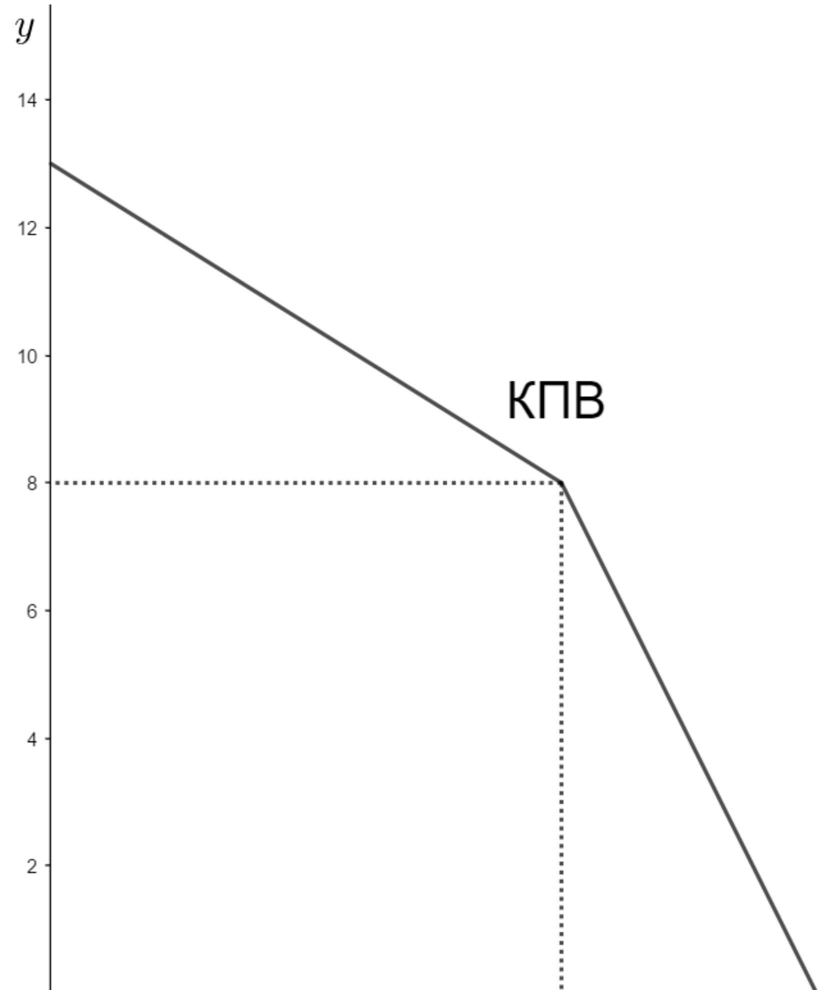


Рис. 115: Суммарная КПВ.

Оптимизация с помощью альтернативных издержек

Данный метод похож на оптимизацию предельными функциями, однако имеет некоторую специфику. Допустим, нам нужно сложить две КПВ, имеющие следующие функции:

$$y_1 = 20 - 4x_1$$
$$y_2 = 16 - x_2^2$$

Их графики выглядят следующим образом:

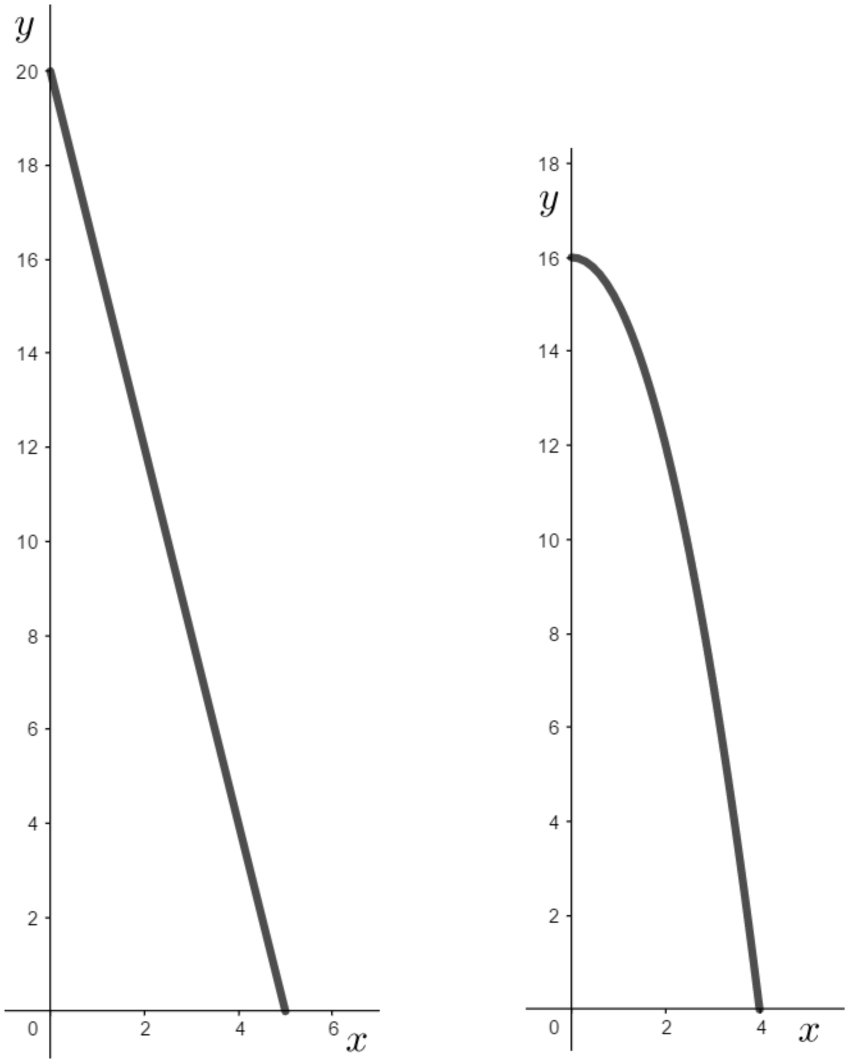


Рис. 116: Два поля.

Решение с помощью альтернативных издержек представляет из себя решение с нулевого случая: выберем какой-то крайний случай и начнем от него отталкиваться. Советую брать за нулевой случай нулевое количество x. Если мы производим $x = 0$, то максимальное количество $y = y_1 + y_2 = 36$. То есть мы начнем нашу КПВ из точки (0;36).

Теперь нам нужно определиться, где мы начнем производить x: на первом или на втором поле. При решении через альтернативные издержки действует одно простое правило: мы будем производит x там, где дешевле, то есть там, где ниже OC_x. Найдем альтернативные издержки на каждом поле:

$$OC_{x_1} = -(20 - 4x_1)'_{x_1} = 4$$
$$OC_{x_2} = -(16 - x_2^2)'_{x_2} = 2x_2$$

Как вы можете заметить, на первом поле альтернативные издержки постоянны, а на втором возрастают. Если мы не производим x, то на втором поле альтернативные издержки равны 0. Следовательно, начнем мы производить x на втором поле. В таком случае альтернативные издержки на нем будут возрастать, пока не достигнут значения 4. В этот момент выгоднее производить становится на первом поле, так как далее на втором издержки будут уже выше 4.

Теперь нам нужно найти момент, в который OC_{x_2} станут равны 4:

$$2x_2 = 4$$

$$x_2 = 2$$

Таким образом, второе поле можно разделить на 2 участка: на одном из них альтернативные издержки меньше, чем на первом, а на другом больше. Посмотрите на графическую иллюстрацию:

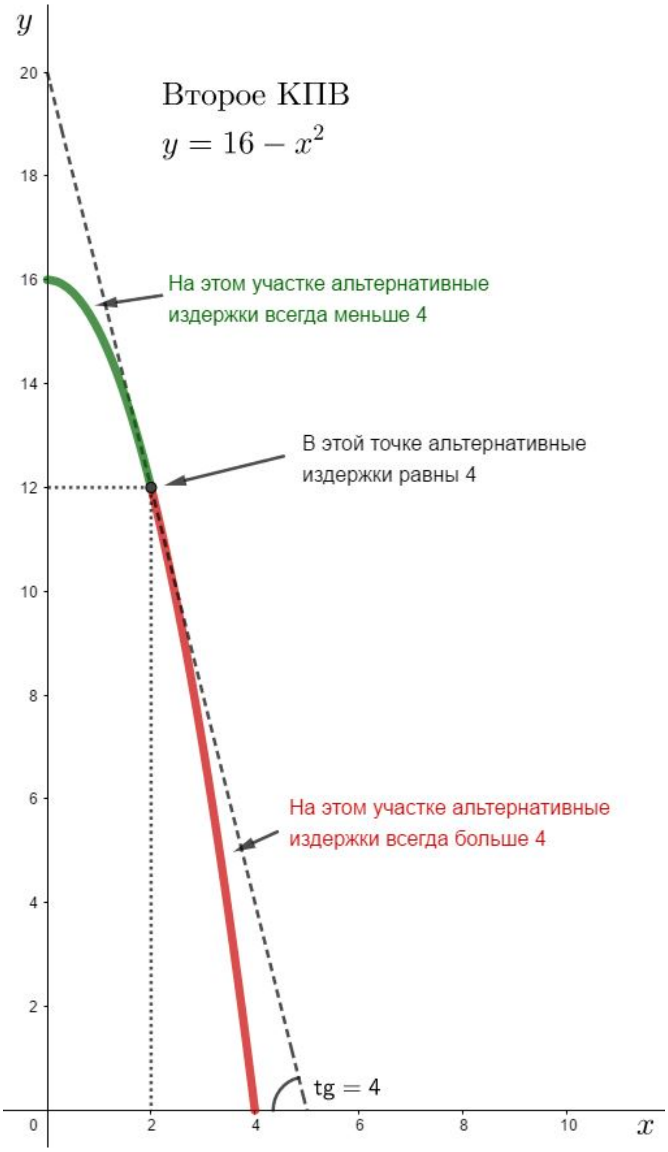


Рис. 117: Альтернативные издержки на втором поле.

Теперь, когда мы знаем, как соотносятся альтернативные издержки между полями, мы можем приступить к построению суммарной КПВ. Для этого из точки (0;36) мы сначала пойдем по технологии второго поля, пока альтернативные издержки не станут равны 4. Далее мы будем производить x по технологии первого поля, пока оно не закончится (то есть сделаем 5 единиц x, итого будет уже 7 единиц x). И далее нам ничего не останется, кроме как продолжить производить по оставшейся части второго поля. Отложив все нужные отрезки, получим нашу суммарную КПВ:

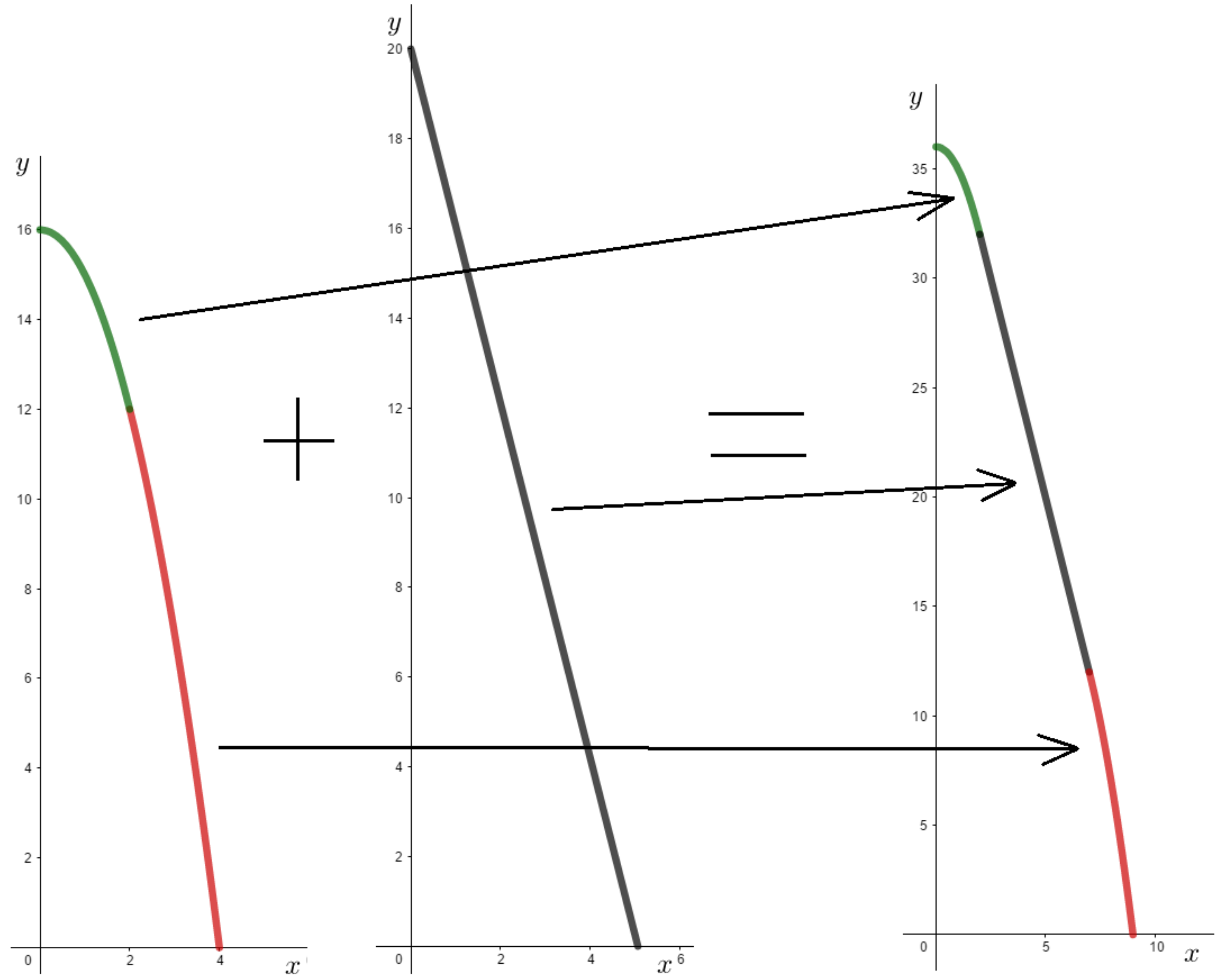


Рис. 118: Суммарная КПВ.

Далее мы можем задать ее аналитически. Естественно, состоять кравнение этой КПВ будет из 3 участков. 1 участок (зеленый) - это сдвинутый наверх участок второго поля. Соответственно, сдвинем его функцию и получим $y = 16 - x^2 + 20 = 36 - x^2$.

Второй участок (черный) - это перое поле, сдвинутое на 12 вверх и на 2 вправо. Сдвинем его функцию: $y = 20 - 4(x - 2) + 12 = 40 - 4x$.

Третий участок (красный) - сдвинутый на 5 вправо красный участок второго поля. Сдивнем: $y = 16 - (x - 5)^2 = -9 + 10x - x^2$.

Итого, получаем полное уравнение нашей КПВ:

$$y = \begin{cases} 36 - x^2 & x \leqslant 2 \\ 40 - 4x & 2 < x \leqslant 7 \\ -9 + 10x - x^2 & x > 7 \end{cases}$$

С помощью альтернативных издержек довольно просто складывать линейные КПВ. Так как на них альтернативные издержки постоянны, то мы всегда сначала производим товар на том поле, где они самые низкие (то есть на том, где КПВ имеет самый низкий наклон), затем - на следующем и т.д. Посмотрите как этой выглядит:

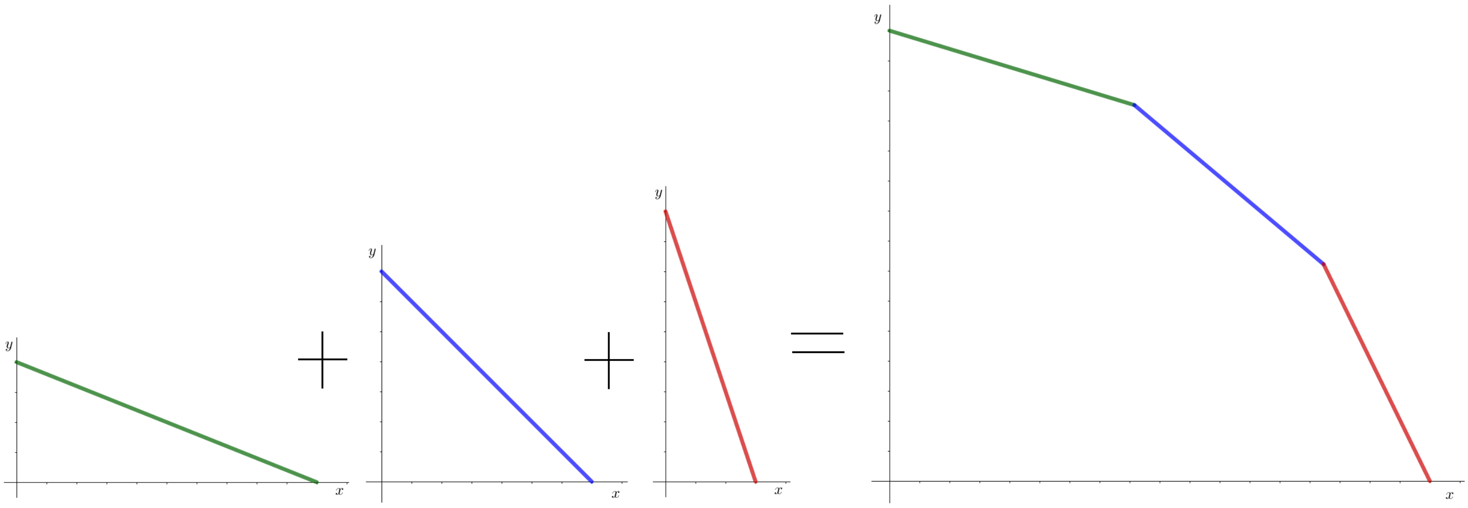


Рис. 119: Сложение линейных КПВ.

Также хочется сказать, что сложение с помощью альтернативных издержек не работает при сложении КПВ с возрастающей отдачей от масштаба. Это происходит из-за того, что мы не можем расположить участки по возрастанию альтернативных издержек, так как на возрастающей отдаче они убывают.

Сложение КПВ векторным методом

Данный метод является уникальным и применяется только в теме КПВ и нигде более. Для этого нам нужно понять, что любой набор двух товаров из нашего МПВ является вектором. (Если вы проходили вектора, то знаете, что вообще любая точка является вектором). При векторном сложении нашей задачей будет сложить **все** вектора одного МПВ со **всеми** векторами другого МПВ. Таким образом, мы получим все доступные суммарные комбинации и суммарную КПВ. Лучше всего данный метод работает для сложения КПВ с **возрастающей отдачей от масштаба**.

Лучше всего, как обычно, рассмотреть данный метод на примере. Мы возьмем как раз пример с возрастающей отдачей. Допустим, нам нужно сложить две следующие КПВ:

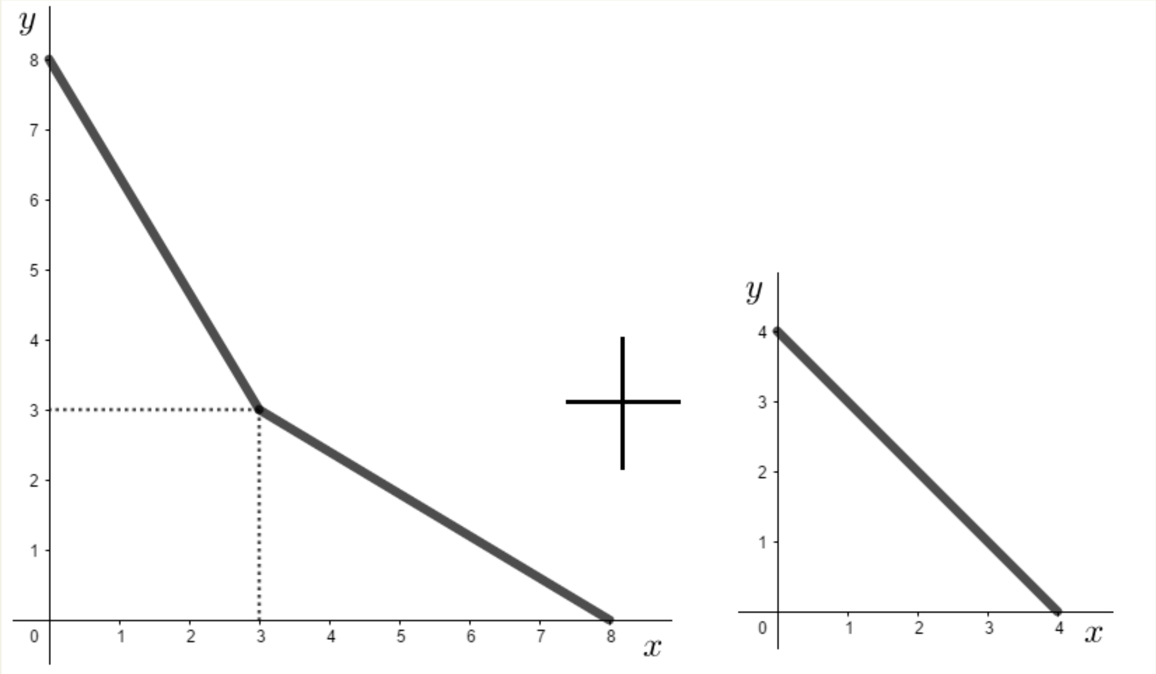


Рис. 120: Сложение двух КПВ.

Как вы можете заметить, у первой КПВ наблюдается положительная отдача от масштаба: изначально x производится с «крутым» наклоном (тангенс угла большой → большие альтернативные издержки), а затем с «пологим», то есть сначала x имеет высокие издержки производства, а затем низкие.

Приступаем к решению с помощью векторного метода Нам нужно выбрать, какая КПВ будет «базой», а какая - «надстройкой» (авторские термины). Советую брать за «базу» самую простую КПВ из предложенных. «Базой» у меня будет вторая КПВ.

Как же это работает: для начала сложим первую КПВ с вертикальным вектором «базы». Выглядит это следующим образом:

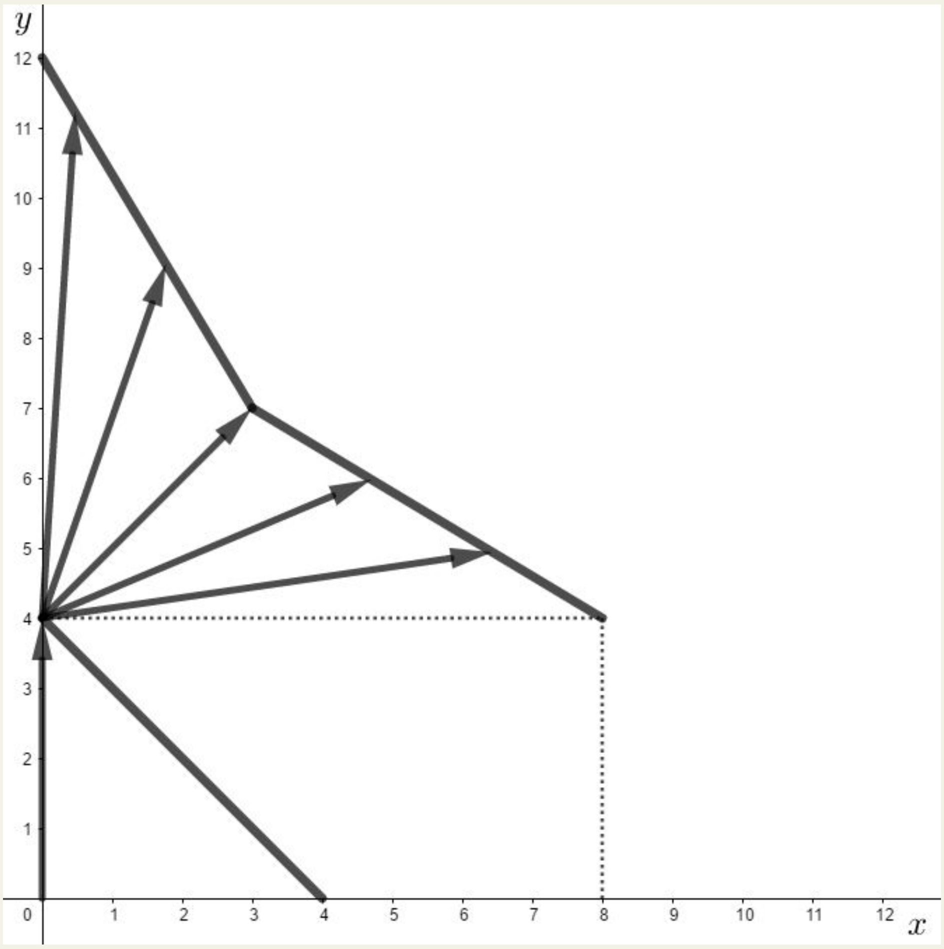


Рис. 121: Сложение «надстройки» с вертикальным вектором «базы».

Вспоминаем нашу задачу: сложить все вектора одной КПВ со всеми векторами другой КПВ. Сейчас мы сложили все вектора «надстройки» только с одним вектором «базы», а нужно со всеми.

Далее, для примера, возьмем один из векторов «надстройки», и сложим его со всеми векторами «базы». Как же нам это сделать? Без иллюстрации здесь не обойтись:

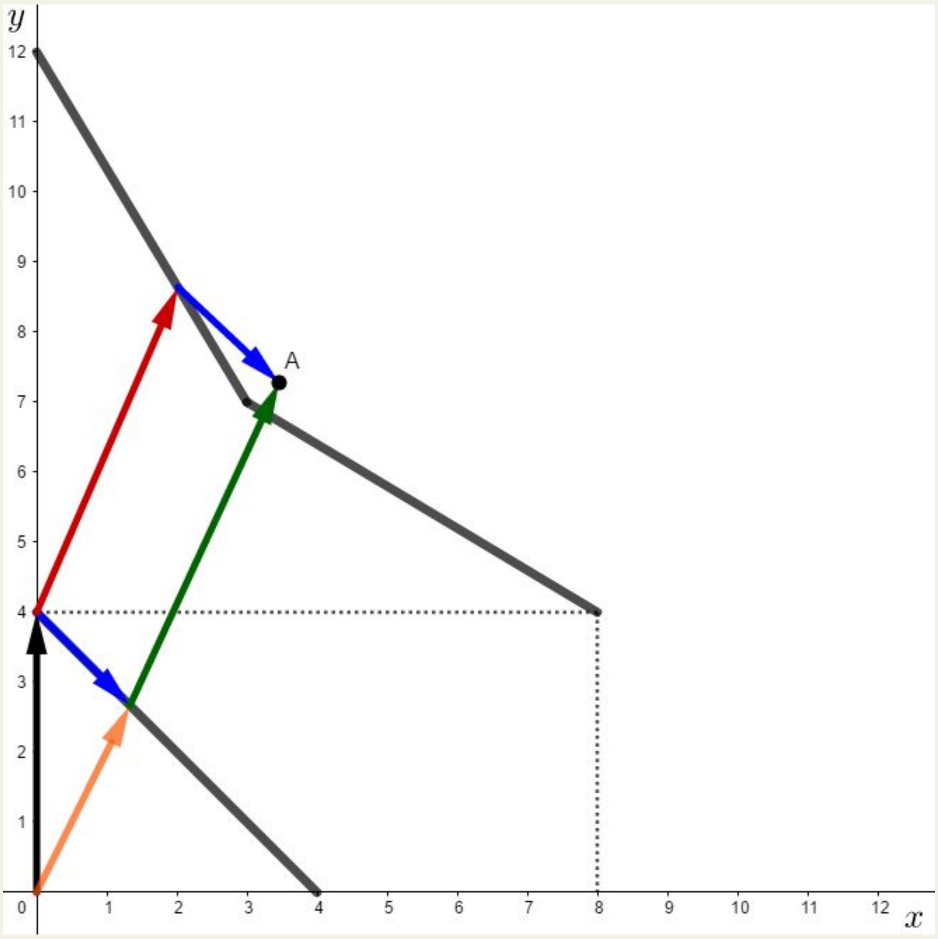


Рис. 122: Векторное сложение.

Допустим, у нас есть уже сложенный ветор «надстройки» (красный) с вертикальным вектором «базы» (черный). Теперь мы хотим сложить (красный) вектор не с черным «базы», а с оранжевым. Так как оранжевый вектор является суммой черного и синего, то, чтобы сложить красный вектор не с черным, а с оранжевым, нам нужно просто прибавить к нему синий. Таким образом, получится зеленый вектор и мы попадем в точку A. Эта точка будет в нашем итоговом МПВ.

Как вы могли заметить, синий вектор лежит на КПВ «базы». Значит, любой вектор «надстройки» может быть сложен с любым вектором «базы», и для этого нужно отложить вектор, лежащий на «базе», от каждого вектора «надстройки». Все точки, лежащие на таких векторах и под ними, будут нам доступны. Изобразим на графике прибавление к «надстройке» всех векторов «базы», и отметив получившуюся КПВ:

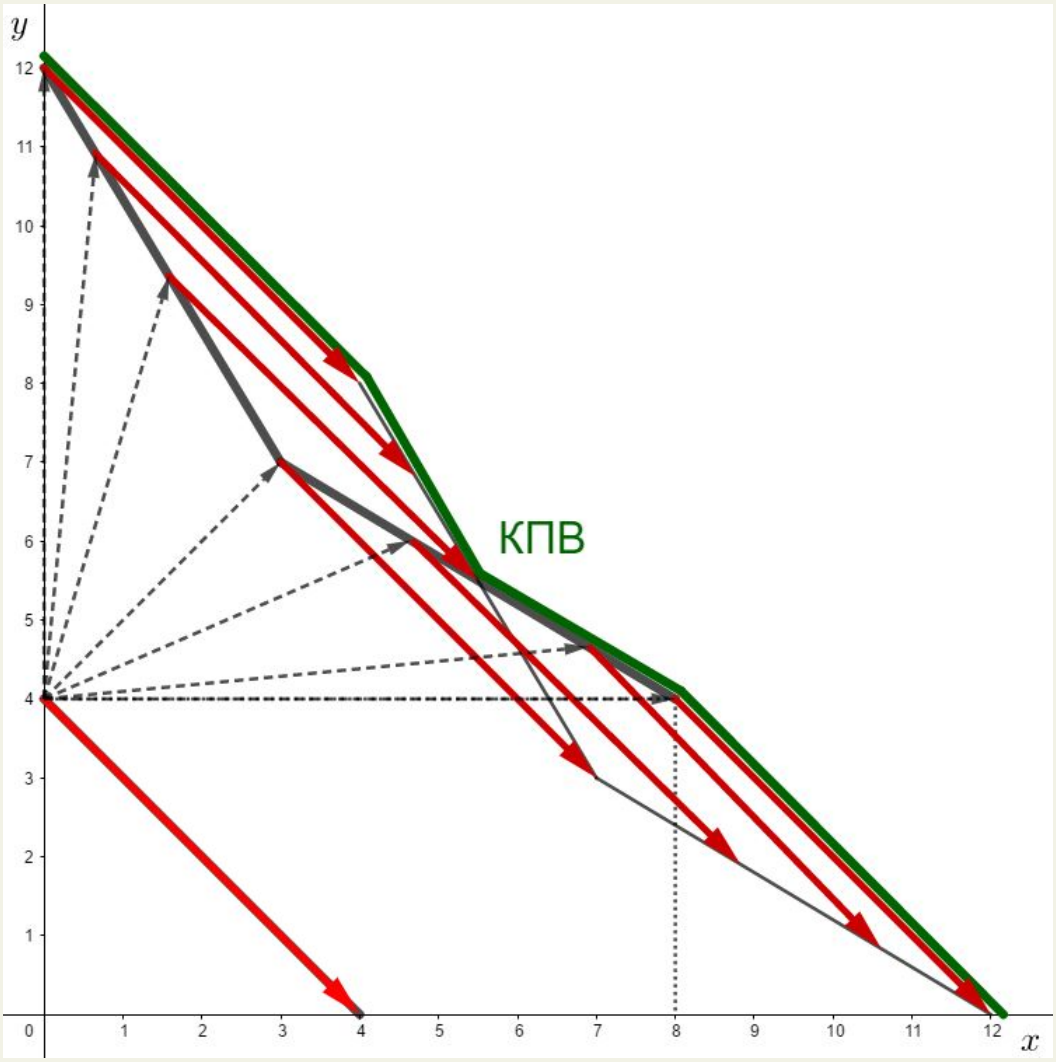


Рис. 123: Итоговая КПВ при векторном сложении.

Торговля в КПВ

Естественно, мы производим товары не просто так, а чтобы их продавать или ими обмениваться. Сейчас мы с вами посмотрим, какие варианты взаимодействия с рынками есть в теме «КПВ».

Абсолютное и сравнительное преимущества

Здесь и вдальнейшем я буду рассматривать торговлю на примере двух стран, обладающих соответствующими КПВ:

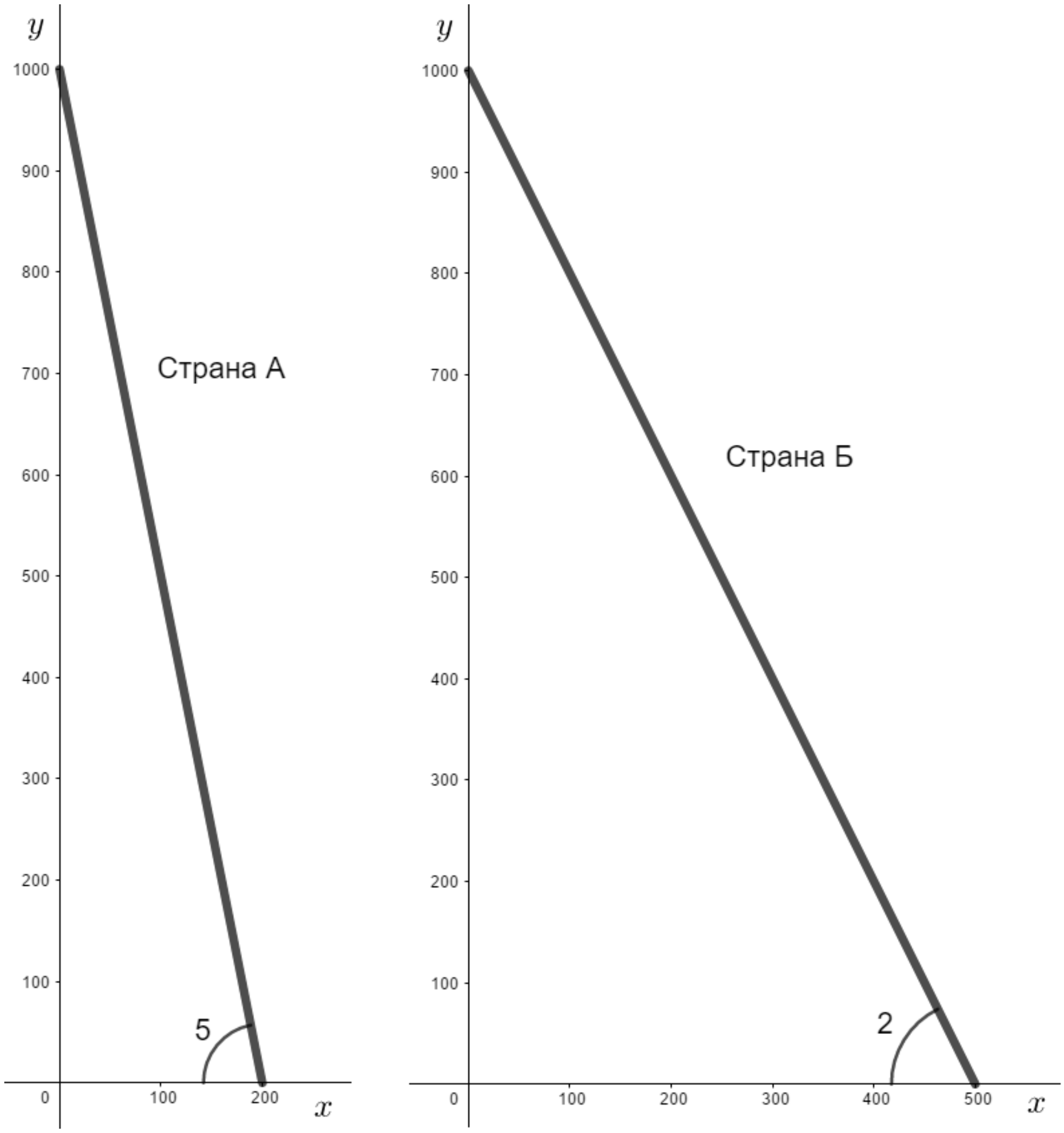


Рис. 124: КПВ двух стран с подписанными OC_x

Для начала выучим концепции аболютного и сравнительного преимуществ, так как про них много спрашивают в тестах.

Страна обладает **абсолютным преимуществом** по сравнению с другой страной в производстве товара, если она имеет меньшие **издержки производства** данного товара. Очень важно то, что в нашем случае при данных КПВ мы **не можем сказать**, какая страна обладает преимуществом по какому товару, так как мы **не знаем, с какими издержками данные страны производят товары**.

Допустим, если добавить к условию, что в стране А работает 200 человек, а в стране Б - 500 человек, то говорить об абсолютном преимуществе уже можно. Давайте по очереди разберем товары:

В стране А при полной специализации (ситуация, в которой страна производит **только** один вид товаров) 200 человек будут делать 1000 единиц товара. Получается, издержки на один товар равны $\frac{1}{5}$ человека. В стране Б 500 человек делают 1000 единиц товара, значит, издержки на 1 товар равны $\frac{1}{2}$ человека. Получается, что в стране А товар y производится с меньшими издержками, значит, страна А обладает абсолютным преимуществом в производстве товара y.

Точно также можно рассуждать о производстве товара x. В данном случае получается, что в каждой стране товар x делает с издержками в 1 рабочую силу. Так как товар производится с одинаковыми издержками в каждой стране, то ни одна страна не обладает абсолютным преимуществом в производстве товара x. Заметьте, что **«никто не обладает абсолютным преимуществом»** и **«мы не можем сказать, кто обладает абсолютным преимуществом»** - разные вещи.

Страна обладает **сравнительным преимуществом** по сравнению с другой страной в производстве товара, если она имеет меньшие **альтернативные издержки производства** данного товара.

В нашем случае альтернативные издержки x в стране А равны 5, а в стране Б равны 2. Значит, страна Б обладает сравнительным преимуществом в производстве x. Интересный факт: так как альтернативные издержки y всегда обратны альтернативным издержкам x, то если одна страна обладает сравнительным преимуществом в одном товаре, то вторая страна всегда обладает сравнительным преимуществом в другом товаре. То есть в нашем случае страна А обладает сравнительным преимуществом в производстве товара y.

Может так оказаться, что ни одна страна не обладает сравнительным преимуществом ни по какому товару. Это может произвойти в двух случаях: если у стран **одинаковые** альтернативные издержки, или же если у стран **непостоянные, а потому несравнимые друг с другом** альтернативные издержки. Если с первым случаем все понятно (если КПВ стран имеют одинаковый наклон, то ни одна из них не обладает сравнительным преимуществом), то вот вам иллюстрация для второго:

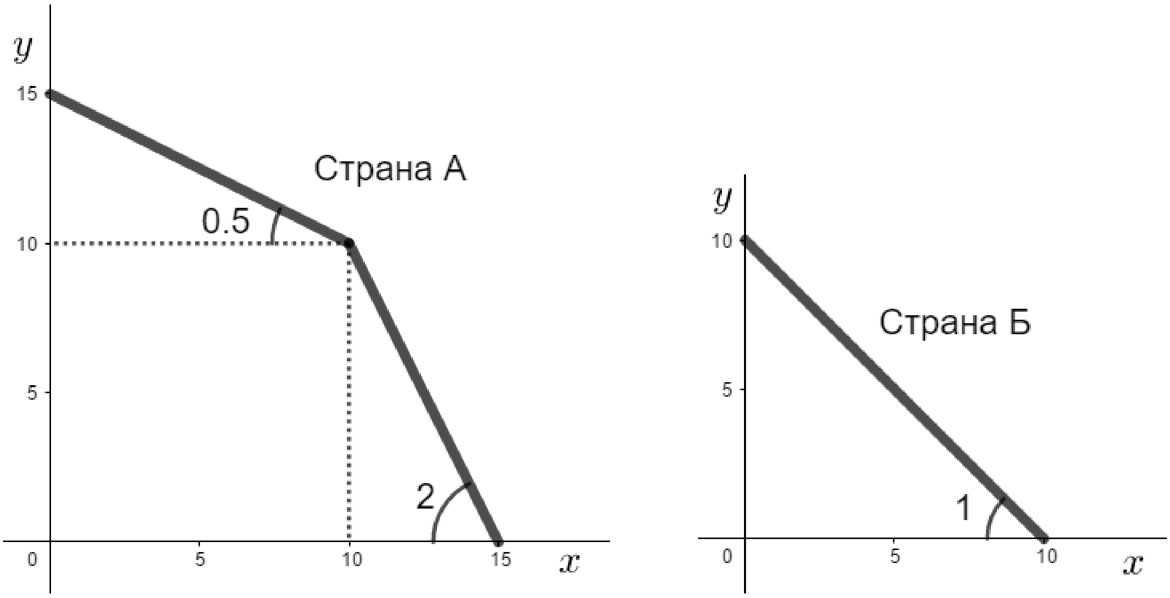


Рис. 125: Ни у одной страны нет сравнительного преимущества.

Как вы видите, на одном участке у страны А альтернативные издержки выше, чем у страны Б, а на втором - ниже. Таким образом, нельзя сказать, у какой страны меньше альтернативные издержки по какому-либо товару. Запоминаем еще одно важное правило, касаемое сравнительного преимущества:

> Если страна обладает сравнительным преимуществом в производстве некоторого товара по сравнению с другой страной, то при торговле данных стран она будет экспортировать этот товар. Соответственно, другая страна будет экспортировать другой товар, в котором у нее также будет сравнительное преимущество.

Уровень относительных цен и оптимизация на КПВ

В большиснтве своем предприятия, фирмы и вообще все производят товары для того, чтобы их продавать. Сейчас мы с вами посмотрим, как именно происходит торговля в теме КПВ. Начнем с основного инструмента оптимизации: линии цен.

Линии уровня относительных цен

Начнем с того, что же такое эти линии уровня относительных цен (или же просто линия цен). По определению, линией цен называются все наборы товаров, за каждый из которых мы получаем одинаковую выручку.

Теперь к тому, как выглядит линия цен. Попробуем записать ее функцию. Пусть мы произвели какое-то количество y и x и все продали. Тогда наша выручка составит $TR = P_x * x + P_y * y$. Зафиксируем TR как постоянный уровень выручки и выразим y из данного уравнения, чтобы получить линию уровня:

$$TR = P_x * x + P_y * y$$
$$y = \frac{TR}{P_y} - \frac{P_x}{P_y}x$$

Как вы можете заметить, это прямая, выходящая из точки $\frac{TR}{P_y}$ и имеющая наклон $-\frac{P_x}{P_y}$. Соответственно, чем больше выручка (TR), тем выше будет прямая:

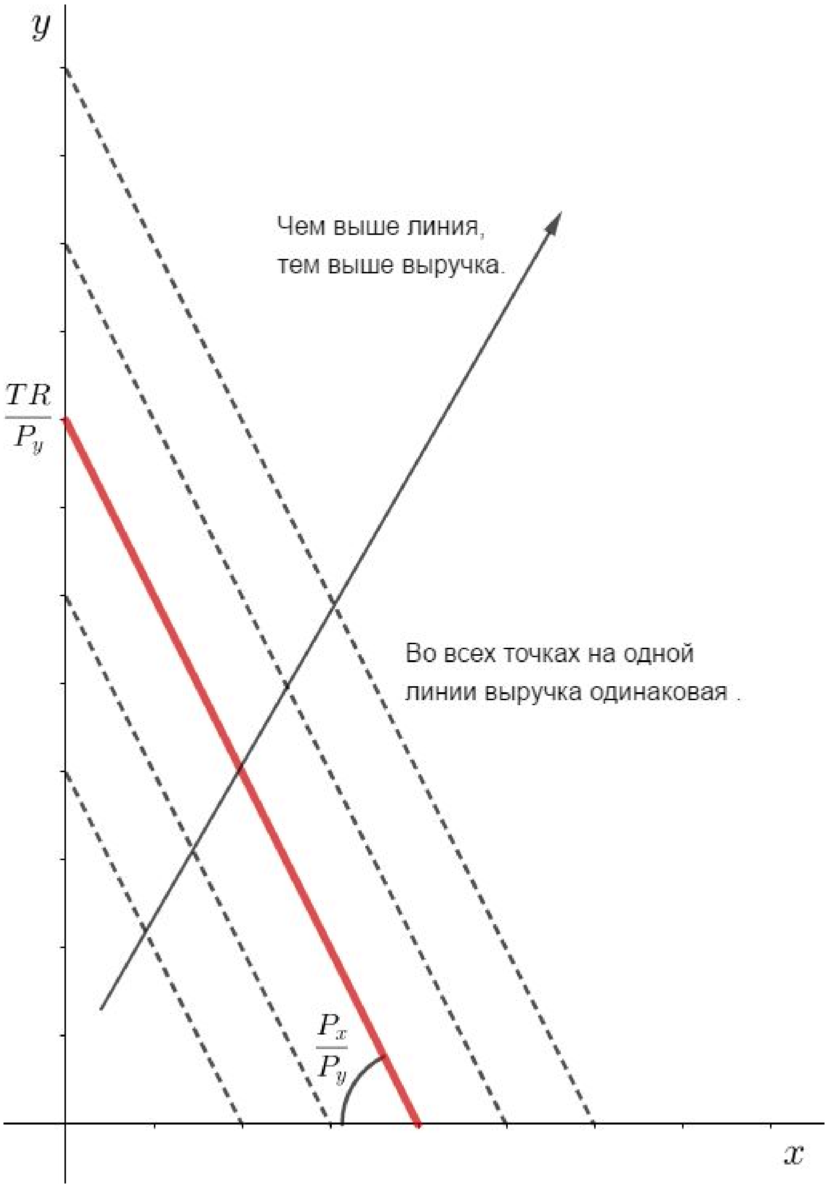


Рис. 126: Линии уровня цен.

Само же соотношение $\frac{P_x}{P_y}$ называется **относительной ценой** товара x, и показывает, сколько товара y можно купить на одну единицу товара x. По сути, $\frac{P_x}{P_y}$ - это альтернативные издержки товара x **при торговле**. При определении относительной цены Всегда стоит ставить цену горизонтальной оси (x) наверх в дроби, так как это показывает нужный наклон линии цен. Наклон линии цен к оси Y, соответственно, равен $\frac{P_y}{P_x}$

В простых случаях при торговле мы просто сравниваем альтернативные издержки товара и его относительную цену ($\frac{P_x}{P_y}$). Если относительная цена x выше альтернативных издержек, то это значит, что за один товар x мы можем купить больше y, чем могли бы произвести вместо него. Следовательно, в таком случае выгоднее производить x и продавать его. Если же, наоборот, альтернативные издержки больше относительной цены, то производить выгоднее y.

Линия цен будет нами использоваться для того, чтобы определять, что именно выгодно производить. Посмотрим на то, как это работает. Рассмотрим КПВ, задающееся функцией $y = 18 - 2x$. Для данной КПВ определим, какой именно набор товаров выгоднее всего производить, с помощью линии цен.

Так как мы хотим наибольшую выручку, нас интересует **наивысшая линия цен, имеющая хотя бы одну точку пересечения с нашими производственными возможностями**. В таком случае точка пересечения и будет оптимальной точкой производства. Пусть $P_x = 3$, $P_y = 2$, то есть $\frac{P_x}{P_y} = \frac{3}{2}$. Тогда наклон линии цен ($\frac{3}{2}$) **положе** наклона КПВ (2). В таком случае у нас получится следуюшая картина:

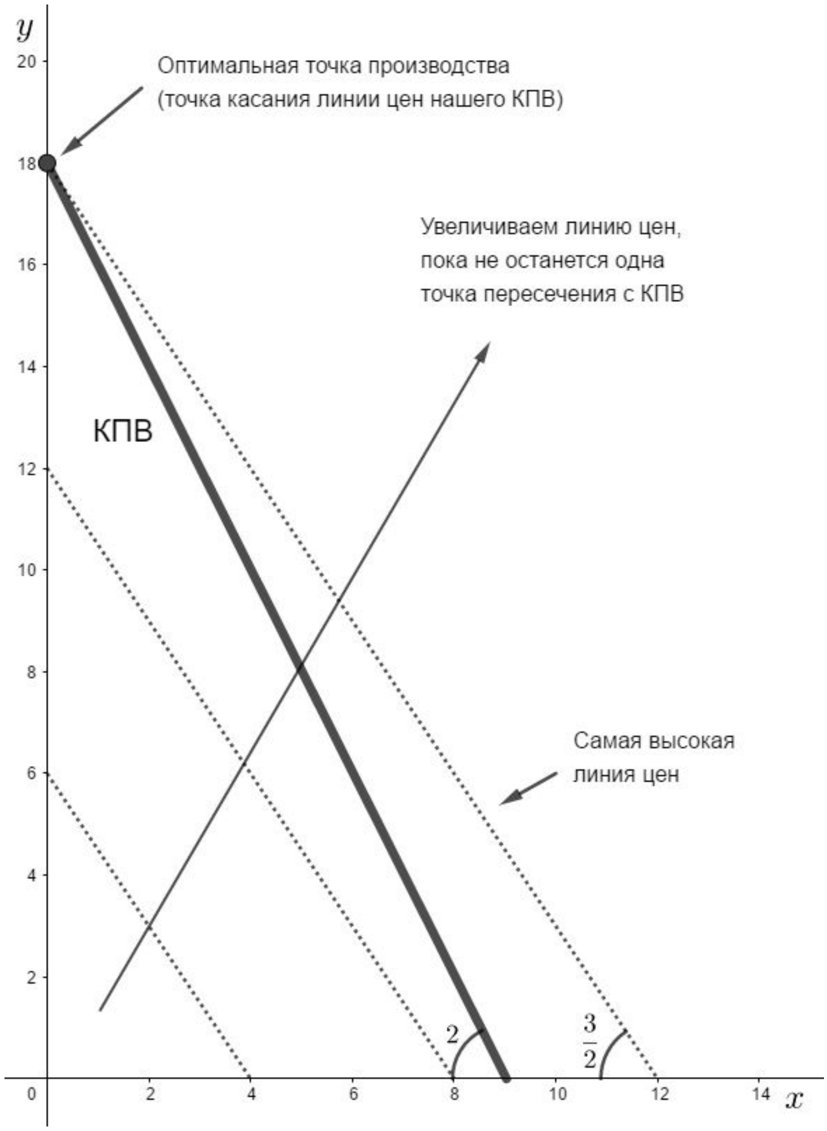


Рис. 127: Определение оптимальной точки производства.

Как вы видите, в таком случае мы будем производить только y. Точно также можно определять оптимальные точки производства на других, более сложных КПВ, просто поднимая линию цен и рассматривая наклоны (например, если КПВ имеет вид окружености, мы будем поднимать линию цен, пока она не станет касательной к окружности).

Оптимизация основной функцией

Конечно же, выручку при постоянных ценах можно оптимизировать и в лоб. Рассмотрим этот метод оптимизации на примере следующей задачи:

У нас в распоряжении имеется завод с КПВ, задающейся уравнением $y = 16 - x^2$. Мы можем произвести любое доступное нам количество товара, все издержки уже понесены. Товары мы продаем по следующим ценам: $P_x = 8$, $P_y = 2$. Нужно определить, какое количество x и y выгоднее всего произвести, чтобы максимизировать выручку.

Чтобы решить задачу, выпишем нашу целевую функцию (выручку):

$$TR = P_x * x + P_y * y = 8x + 2y$$

Теперь нужно сказать, что мы будем полностью использовать наши ресурсы, так как выручка возрастает по каждому товару (то есть мы будем производить строго на КПВ, а не под ней). Следовательно, в оптимизации будет верно уравнение нашего КПВ ($y = 16 - x^2$), которое мы можем использовать, подставив в нашу функцию. Далее у нас останется только одна переменная, по которой мы можем промаксимизировать нашу выручку:

$$TR = 8x + 2y = 8x + 2(16 - x^2) = 8x - 2x^2 + 32 \xrightarrow{x} max$$

Это парабола ветвями вниз, значит, нам нужна вершина:

$$x^* = 2$$

Проверяем: мы можем произвести $x = 2$ (y не становится отрицательным). Следовательно, оптимальной точкой производства является $x = 2$ и $y = 16 - x^2 = 12$.

Данный способ выглядит довольно просто на этом примере, однако я настоятельно советую пользоваться линией цен для решения задач при фиксированных ценах. Например, в случае с кусочной КПВ метод прямой оптимизации значительно усложняется, тогда как решение с помощью линии цен все еще остается довольно простым.

Вывод функции предложения в КПВ

Точно также можно находить предложение фирмы, обладающей определенной КПВ. Допустим, наша КПВ задается уравнением $y = 25 - \frac{x^2}{25}$. $P_y = 1$, и нашей задачей будет построить функцию предложения товара x данной фирмы. Делать это можно любым из вышеописанных способов, просто проведя оптимизацию с P_x в виде параметра (собственно, как мы и выводим предложение любого совершенного конкурента). Я буду делать это простой оптимизацией:

$$TR = P_x * x + P_y * y = P_x * x + 25 - \frac{x^2}{25} \xrightarrow{x} max$$

Это парабола ветвями вниз, нам нужна вершина:

$$x^* = \frac{25P_x}{2}$$

Проверяем ограничение: максимальный x, который фирма может произвести найдем, приравняв y к 0:

$$0 = 25 - \frac{x^2}{25}$$
$$x = 25$$

Теперь проверим вершину на это ограничение ($x \leqslant 25$):

$$\frac{25P_x}{2} \leqslant 25$$
$$P_x \leqslant 2$$

Иначе (при $P_x > 2$) нам придется взять ограничение, которое, нас выбило, то есть $x = 25$. Теперь мы можем построить функцию предложения фирмы:

$$x = \begin{cases} \frac{25P_x}{2} & P_x \leqslant 2 \\ 25 & P_x > 2 \end{cases}$$

Оптимизация монополиста на КПВ

Вместо задачки просто рассмотрим, чем оптимизация монополиста отличается от оптимизации при фиксированных ценах:

1. Вместо цен в функцию выручки мы подставляем не числа, а функции спроса. Например, если монополист работает на двух рынках с функциями спроса $x = 5 - P_x$ и $y = 10 - P_y$, то, выразив цены из функций спроса, его выручку мы можем записать как $TR = P_x * x + P_y * y = (5 - x)x + (10 - y)y$.
2. Всегда существует оптимум выручки, то есть такой набор x и y, при которых выручка максимальна. Эта точка в некоторых задачах **может находиться под КПВ**.

Таким образом, чтобы промаксимизировать выручку монополиста на КПВ, необходимо:

1. Найти максимум выручки.
2. Проверить, не находится ли он под КПВ. Если он под или на КПВ, то ответ задачи найден. Если точка над КПВ, то мы говорим, что в таком случае мы будем использовать все наши возможности (уравнение КПВ будет выполняться в оптимуме).
3. Если точка максимума выручки над КПВ, максимизируем выручку, подставляя в нее функции спроса и функцию КПВ (таким образом, у вас получится функция от одной переменной).

Взаимовыгодная торговля стран

Рассмотрим те же страны, что были в самом начале темы:

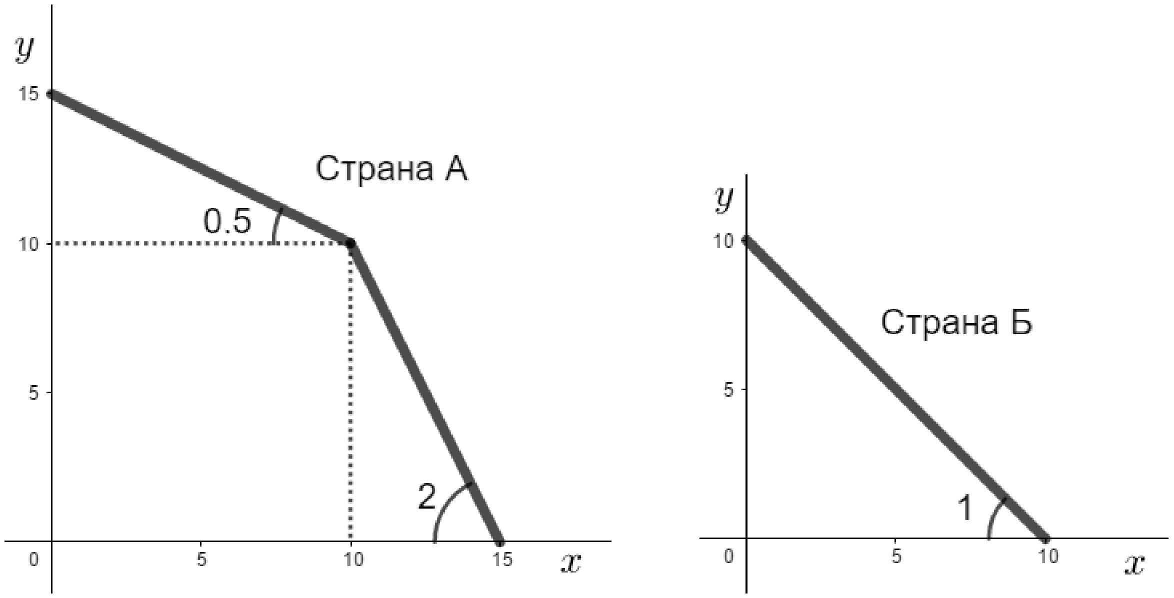


Рис. 128: Те самые две страны.

Для начала нашей задачей будет найти условия взимовыгодной торговли, то есть такие уровни относительных цен $\frac{P_x}{P_y}$, при которых обе страны согласятся на торговлю друг с другом.

Есть несколько способов, как это сделать, но я советую один универсальный: найти, когда страны не торгуют, и сказать, что при всех остальных $\frac{P_x}{P_y}$ торговля возможна. Торговля между странами невозможна, **если они производят один и тот же товар**.

Сначала найдем, когда обе страны будут производить только y, то есть когда линия цен коснется каждой КПВ в самой верхней точке. Здесь я делаю ставку на ваше воображение, чтобы не загромождать эту тему еще большим количеством графиков. Для того, чтобы линия цен коснулась КПВ в самой верхней точке, ее наклон должен быть положе, чем наклон самого верхнего участка. То есть $\frac{P_x}{P_y} < 0.5$ для страны А и $\frac{P_x}{P_y} < 1$ для страны Б. То есть если выполняются оба условия (это происходит при $\frac{P_x}{P_y} < 0.5$), обе страны делают только y и не торгуют друг с другом. Аналогично, если $\frac{P_x}{P_y} > 2$, то обе страны делают только x и также не торгуют. Следоватльно, при $0.5 \leqslant \frac{P_x}{P_y} \leqslant 2$ торговля возможна.

Другим вопросом будет кто что экспортирует, а кто что импортирует при различных уровнях цен от 0.5 до 2. Для начала стоит сказать, что при $0.5 < \frac{P_x}{P_y} < 2$ линия цен будет касаться КПВ страны А в точке (10;10), так как будет иметь наклон круче, чем на верхнем участке, но положе, чем на нижнем, то есть страна А будет производить и x, и y. Вопрос остается только в том, что будет производить страна Б.

При $\frac{P_x}{P_y} < 1$ линия цен положе, чем наклон КПВ в стране Б, следовательно, она коснется ее в верхней точке, и страна Б будет производить y. В таком случае, при торговле со страной А страна Б будет экспортировать y и импортировать x.

При $\frac{P_x}{P_y} > 1$ все наоборот: линия цен касается КПВ в точке $x = 10$, и при торговле со страной А страна Б будет экспортировать x и импортировать y.

Если же $\frac{P_x}{P_y} = 1$, то линия цен просто совпадет с КПВ страны Б, то есть стране Б будет вообще безразлично, какую точку производить. В таком случае торвголя может идти в любую сторону: страна может как импортировать, так и экспортировать любой товар.

Построение КТВ

Теперь мы будем учиться строить КТВ - кривую торговых возможностей. КТВ - это кривая, отражающая полное и эффективное использование ресурсов **при производстве и торговле**. КТВ не может быть ниже КПВ ни в какой точке, так как торговля увеличивает возможности, иначе страна (или любой другой агент) не согласится на торговлю.

В качестве примера я также буду использовать две страны, которые мы рассматривали ранее:

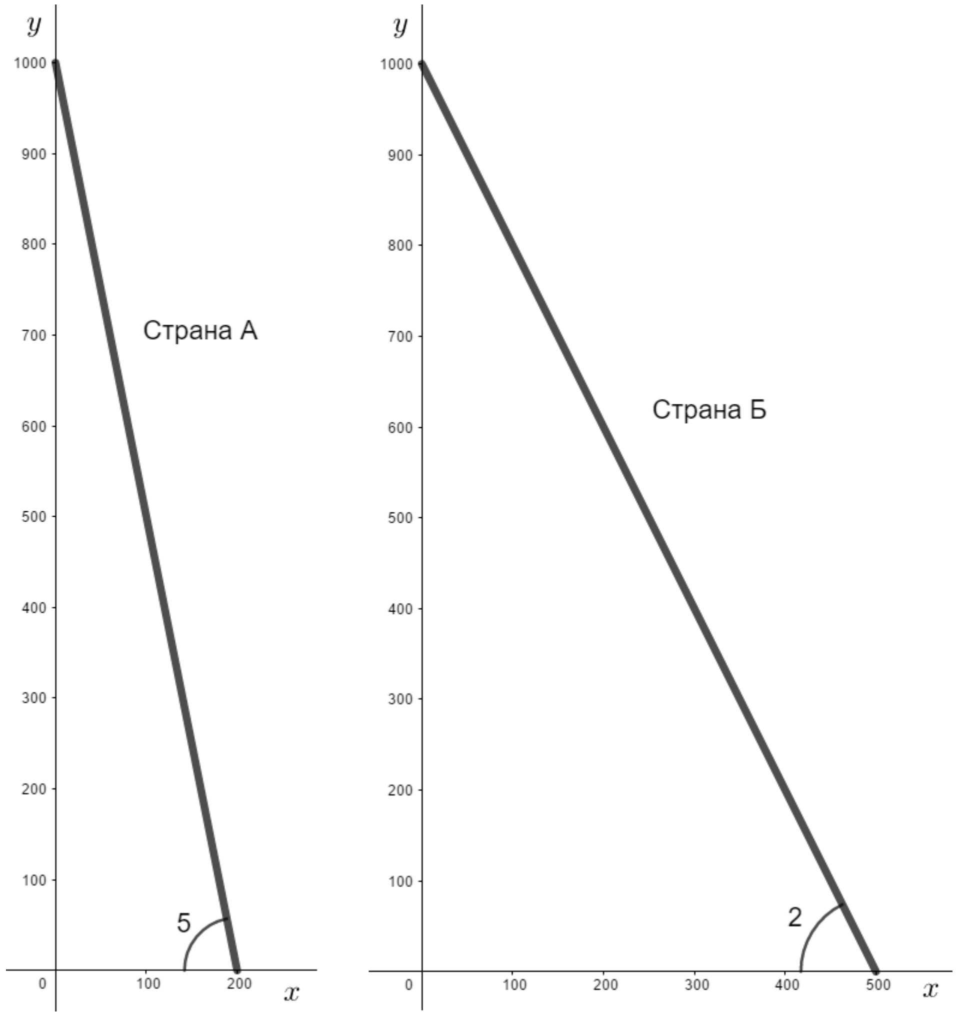


Рис. 129: Две страны, которые сейчас будут торговать друг с другом.

Нашей задачей будет построить КТВ каждой страны при условии, что $\frac{P_x}{P_y} = 4$ и страны торгуют **только** друг с другом.

Для начала найдем, кто чем будет торговать. Для этого проведем линию цен с наклоном 4 и определим оптимальные точки производства. Этот наклон положе, чем 5, значит, в стране А линия цен коснется КПВ сверху и она будет делать только y. Аналогично, оптимальной точкой производства в стране Б будет самая правая точка, и она будет производить только x. (Иллюстрация будет немного позже).

После того, как мы определили оптимальные точки производства, мы начинаем из них торговать. То есть мы можем менять из этих точек x на y или наоборот в соотношении 4 единицы y за одну единицу x (исходя из уровня относительных цен). Таким образом, из оптимальной точки производства мы можем торговать с наклоном 4. Чтобы это изобразить, мы строим прямую с наклоном 4 прямо из этой точки (а это и есть линия цен, которая проходит через эту точку). Таким образом, данная прямая и будет являться КТВ страны. Посмотрите на иллюстрацию на примере страны А:

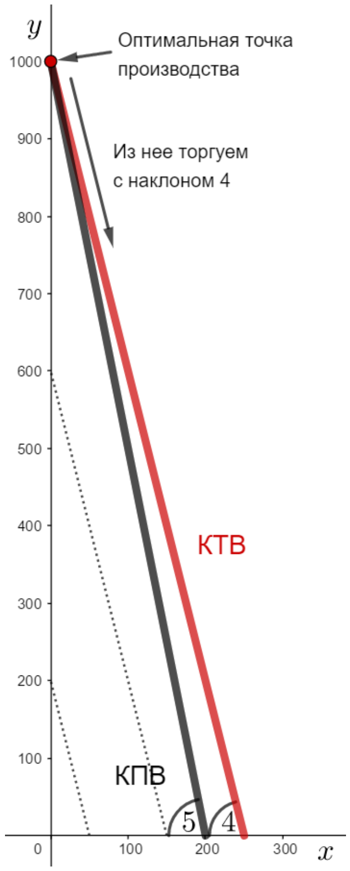


Рис. 130: КТВ страны А

Так как страны торгуют только друг с другом, нам нужно дополнительно проверить, все ли точки на КТВ нам доступны. Максимальное количество x, которое страна А имеет возможность купить - 250 ($\frac{1000}{4}$). Страна Б в оптимуме производит 500 единиц y, то есть 250 она продать может. Значит, полученная нами КТВ является итоговой.

Со страной Б будет немного сложнее. Проделав те же самые манипуляции, мы понимаем, что, так как она производит 500 единиц x, то имеет возможность купить 2000 единиц y (500*4). Однако, страна А может продать ей только 1000 единиц, и на этом торговля закончится. Получается, торговать из своей точки с наклоном 4 страна Б сможет только до того момента, пока не купит 1000 единиц y. После этого у нас останется $500 - \frac{1000}{4} = 250$ единиц x. Далее, если страна Б хочет получить большее, чем 1000 единиц y, они может это сделать только произведя их. Страна Б будет допроизводить y по вектору производства из ее оптимальной точки производства. А теперь, чтобы осознать все это, внимательно посмотрите на иллюстрацию ниже:

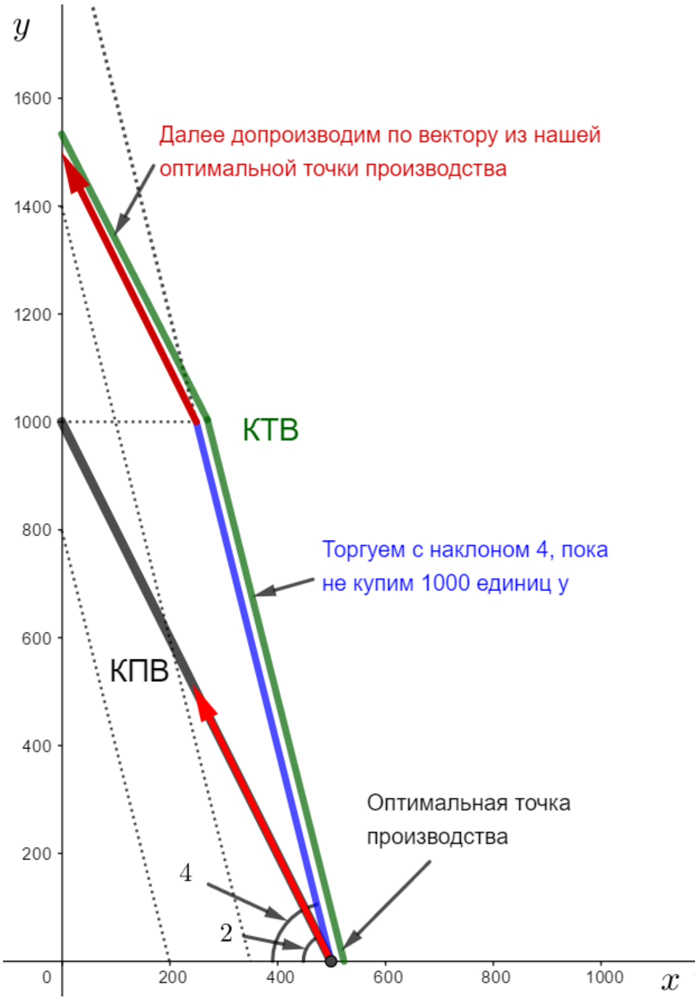


Рис. 131: КТВ страны Б

Ну вот мы и научились строить КТВ.

Неравенство

В данной теме мы разберем актуальную экономико-популистскую проблему неравенства в распределении доходов между населением стран. Неравенство в доходах - неотъемлемая часть рыночной экономики, и важная социальная проблема в некоторых странах. Экономика особый упор делает на измерение уровня неравенства, а также на предсказание влияния различных событий, которые могут произойти в обществе, на этот уровень.

Кривая Лоренца и коэффициент Джини

Кривая Лоренца и коэффициент Джини являются основными метриками неравенства в экономике.

Кривая Лоренца - это кривая, строящаяся в координатах {доля в населении ; доля в доходе} по следующему принципу: каждая точка на кривой Лоренца с координатами (x,y) показывает, какую долю дохода y получает доля x **беднейшего** населения страны.

Базовые факты про кривую Лоренца:

1. Так как x и y - **доли**, то они не могут превышать значения 1.
2. Кривая Лоренца обязательно проходит через точки (0;0) и (1;1), так как 0% населения точно обладают 0% дохода, а 100% населения гарантированно обладают 100% доходов.
3. Никакая точка на кривой Лоренца не может быть выше прямой $y = x$. Докажем:

   Пусть N - население страны, а I - суммарный доход населения. В таком случае средний доход человека в стране равен $\frac{I}{N}$.

   Теперь рассмотрим точку выше кривой $y = x$ в координатах Лоренца (то есть $y > x$). Это значит, что беднейшие $x * N$ человек обладают доходом в $y * I$. Тогда их средний доход равен $\frac{y*I}{x*N} = \frac{y}{x} * \frac{I}{N} > \frac{I}{N}$, так как $y > x$. Следовательно, беднейшая группа людей имеет средний доход больший, чем средний доход по стране. Получается, что эта группа людей не может быть беднейшей. Таким образом, точка не может лежать выше прямой $y = x$.
4. Прямая $y = x$ называется **прямой абсолютного равенства**. Действительно, если вся кривая Лоренца лежит на прямой $y = x$, то какую бы точку мы не взяли, средний доход группы всегда будет равен $\frac{y*I}{x*N} = \frac{x*I}{x*N} = \frac{I}{N}$. То есть любая группа людей получает доход, равный среднему доходу в стране. Получается, все имеют одинаковый доход.
5. **Кривая абсолютного неравенства** задается прямыми $y = 0$ и $x = 1$.

Посмотрите на графическую иллюстрацию, чтобы все осознать (я буду откладывать обозначения на оси $x = 1$, так как так удобнее всего дальше с ними работать):

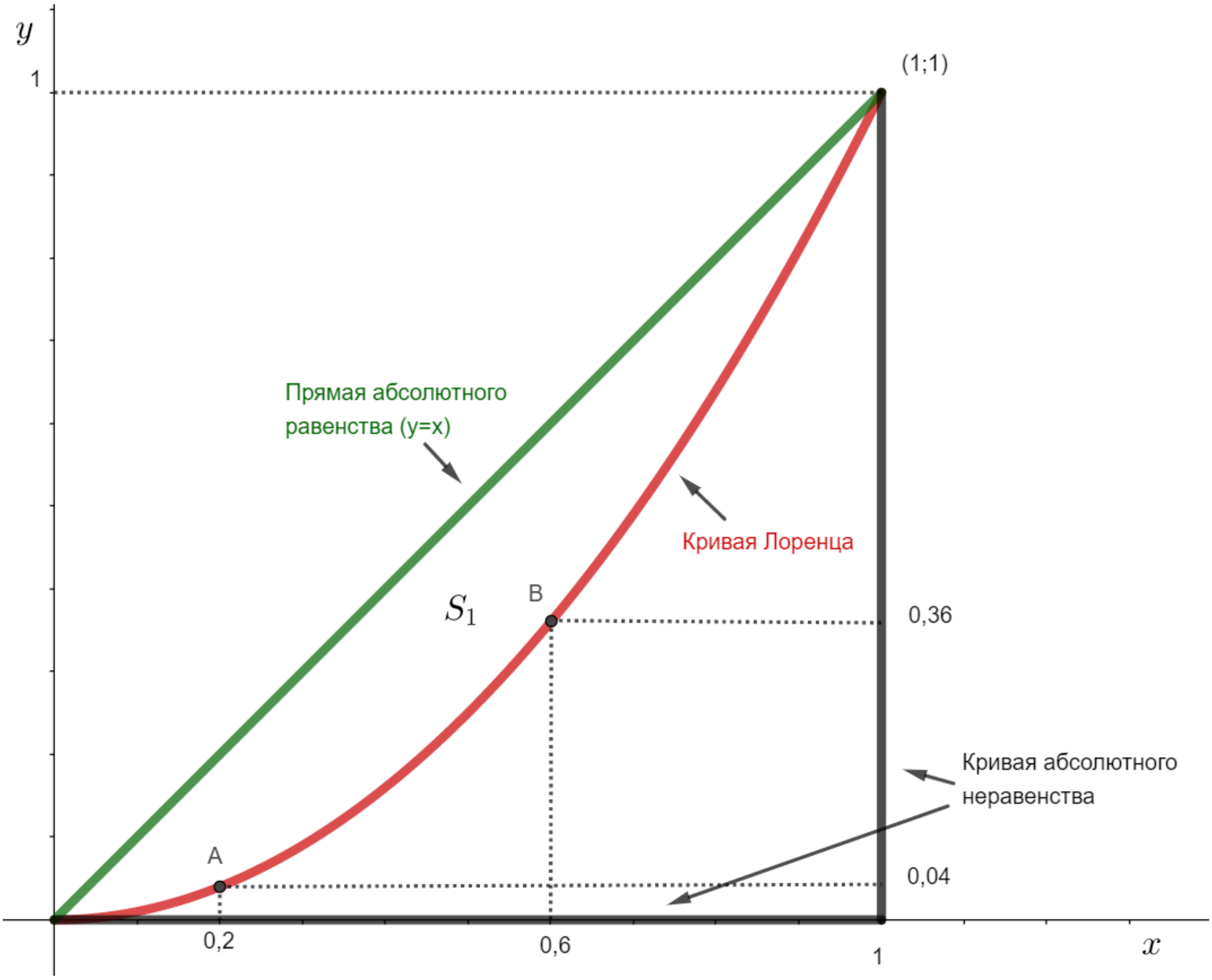


Рис. 132: Кривая Лоренца

На данном графике вы можете увидеть, что в стране, которую описывает данная кривая Лоренца, 20% беднейшего населения получают лишь 4% дохода страны (точка A), а 60% беднейшего населения получают 36% дохода страны (точка B). Например, это значит, что 40% богатейших людей обладают 64% дохода.

Теперь перейдем к тому, как можно «измерить» неравенство в стране в численном выражении. Самая распространенная мера (и единственная, используемая в задачах по олимпиадной экономике) - это **коэффициент Джини**.

Коэффициент Джини (G) - это отношение площади над кривой Лоренца, но под прямой абсолютного равенства (на графике площадь S_1) к площади всего треугольника (которая равна $S = 1 * 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$). Таким образом, коэффциент Джини равен $2S_1$.

Так как площадь S_1 не может быть больше площади треугольника, то коэффициент Джини может принимать лишь значения $0 \leqslant G \leqslant 1$. Чем выше значение коэффициента, тем большее неравенство в доходах достигается в стране (тем дальше кривая Лоренца от прямой абсолютного равенства и тем она ближе к кривой абсолютного неравенства).

Если кривая Лоренца совпадает с прямой абсолютного равенства, то коэффициент Джини равен 0. Если кривая Лоренца совпадает с кривой абсолютного неравенства, то коэффициент Джини равен 1.

Доход в конкретной точке

Как вы могли заметить, по оси X на графике располагаются люди от самого бедного к самому богатому. Кривая Лоренца позволяет нам посчитать доход человека, находящегося в конкретной точке на этой оси (то есть человека, имеющего какую-то координату x_0).

В таком случае доход человека можно задать как $y'(x_0) * \frac{I}{N}$, где $y(x)$ - функция кривой Лоренца (соответственно, $y'(x)$ - это производная кривой Лоренца). Данное утверждение верно, так как $y'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то есть производная кривой Лоренца обозначает **прирост доли дохода группы при добавлении дополнительной точки населения в эту группу**, то есть, по сути, долю дохода этой конкретной точки. Если умножить эту величину на средний доход в стране ($\frac{I}{N}$), то как раз получится доход конкретного человека в этой точке.

Из данного факта следует, что **производная кривой Лоренца не может убывать**, то есть доход каждого следующего человека не может быть меньше дохода предыдущего, так как они расположены по возрастанию дохода.

Равномерное распределение доходов внутри групп населения

Обычно в задачах встречаются страны, в которых присутствуют несколько различных групп населения, причем эти группы называются «однородными». Другими словами, в таких группах доходы разделены равномерно. Так как все члены группы получают одинаковый доход, то производная кривой Лоренца на протяжении всей группы оказывается одинаковой, поэтому участок кривой Лоренца для группы оказывается прямым отрезком. Соответственно, если все группы являются однородными, то кривая Лоренца принимает вид ломаной кривой. Как именно это выглядит смотрите в следующей теме.

Подсчет коэффициента Джини

Существует два способа подсчета Джини в задачах. Хочу заметит, что в олимпиадных задачах не будут просить посчитать коэффициент Джини ни для каких структур населения, кроме однородных. Если кривая Лоренца не является ломаной (а задается какой-либо другой функцией), то подсчет Джини будет включать в себя вычисление **интегралов**, что не включается школьную программу 10 классов, а, следовательно, не должно включаться в олимпиадные задачи.

Таким образом, здесь будут разобраны основные способы вычисления коэффициента Джини для однородных групп населения. Разберем их:

Вычисление коэффициента Джини по определению

Для вычисления коэффициента Джини по определению нам нужно будет высчитывать площади и делить их друг на друга. Сразу же разберем процесс вычисления на примере задачи.

Допустим, нам необходимо вычислить коэффициент Джини для страны, в которой проживает три одинаковых по численности группы населения: бедные, средние и богатые. Каждый бедный зарабатывает 1 монету, каждый средний - 3 монеты, а каждый богатый - 5 монет.

Для подсчета коэффициента Джини нам необходимо построить кривую Лоренца. Сейчас она будет состоять из трех звеньев, и нам достаточно найти точки перелома. Первая точка - $(\frac{1}{3}; \frac{1}{9})$, так как бедные получают $\frac{1}{1+3+5} = \frac{1}{9}$ долю дохода. Второй точкой перелома будет переход между средними и богатыми. Вместе, бедные и средние получают $\frac{1+3}{1+3+5} = \frac{4}{9}$. Тогда вторая точка перелома - $(\frac{2}{3}; \frac{4}{9})$. Между этими точками расположены прямые отрезки, так как группы однородны. Теперь мы можем построить кривую Лоренца:

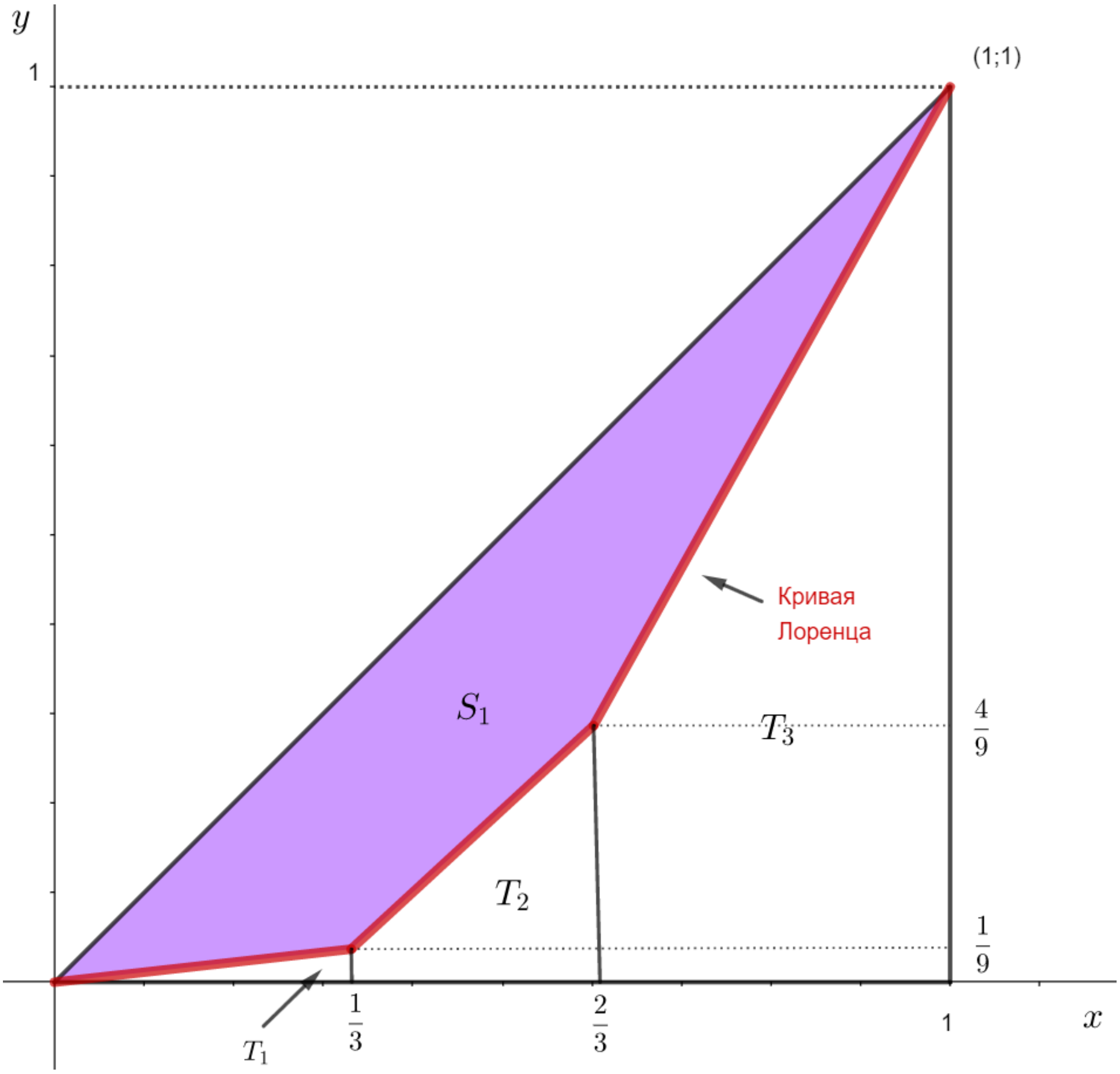


Рис. 133: Кривая Лоренца для трех однородных групп

На графике вы можете заметить, что посчитать площадь S_1 сразу не так уж и просто, поэтому мы высчитаем нижнюю площадь, которая состоит из треугольника T_1 и трапеция T_2 и T_3, а затем вычтем их из площади большого треугольника, чтобы получить S_1.

Рассчитаем нижние площади:

$$T_1 = \frac{1}{3} * \frac{1}{9} * \frac{1}{2} = \frac{1}{54}$$

$$T_2 = (\frac{1}{9} + \frac{4}{9}) * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{5}{54}$$

$$T_3 = (\frac{4}{9} + 1) * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{13}{54}$$

Так как площадь большого треугольника равна $S = \frac{1}{2}$, то мы можем найти площадь S_1:

$$S_1 = S - (T_1 + T_2 + T_3) = \frac{1}{2} - \frac{19}{54} = \frac{8}{54}$$

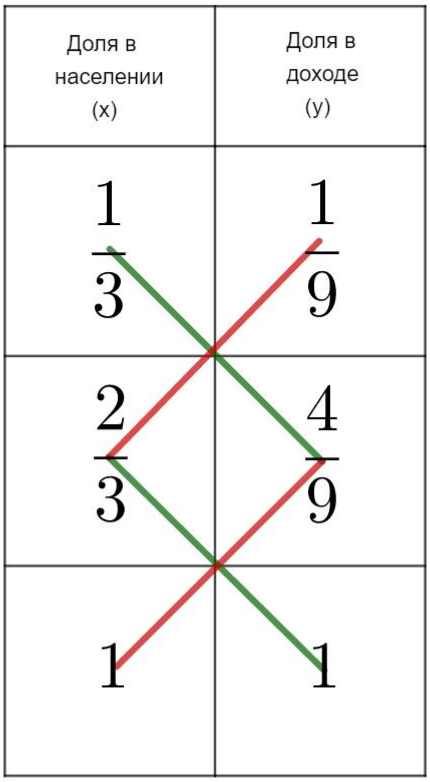
Теперь мы можем найти коэффициент Джини по определению как отношение S_1 к площади большого треугольника:

$$G = \frac{S_1}{S} = \frac{\frac{8}{54}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{27}$$

Вычисление коэффициента Джини через таблицу

Решим ту же самую задачу другим способом, для которого нам все равно необходимы точки перелома кривой Лоренца. Этот способ будет работать **только** для однородных групп населения.

В таблице будут находится два столбца, в которых необходимо выписать подряд точки на кривой Лоренца: слева - доли в населении, справа - доли в доходе. Таблица в случае нашей задачи будет выглядеть следующим образом:



Доля в населении (x)	Доля в доходе (y)
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
1	1

Рис. 134: Таблица для вычисления коэффициента Джини

Теперь можем считать коэффициент Джини: он будет равен сумме зеленых диагональных произведений за вычетом суммы красных диагональных произведений.

Посчитаем:

$$G = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \cdot 1 = \frac{8}{27}$$

Этот способ имеет за собой громоздкое доказательство, которое я здесь приводить не буду. Данный метод скорее всего можно использовать без доказательства на олимпиаде, так как он использовался в официальных критериях на одном из муниципальных этапов ВсОШ в Москве (но я не уверен).

Не забывайте, что если в задаче меняется доход групп, то они могут поменяться местами (например, богатые могут стать средними или бедные могут стать самыми богатыми).
В таком случае группы поменяются местами по оси X, и необходимо будет пересчитывать все точки.

Построение кривой Лоренца для определенной группы

В последнее время довольно часто в олимпиадных задачах требуют построить кривую Лоренца не для всего населения, а для какой-либо его части.

Рассмотрим пример такой задачи:

Кривая Лоренца в стране описывается функцией $y = x^2$. В стране существует три группы населения: бедные (25% беднейшего населения), богатые (25% богатейшего населения) и средние (все остальные). Нашей задачей является построить кривую Лоренца распределения доходов для **средней** группы населения.

Изобразим графически условие задачи:

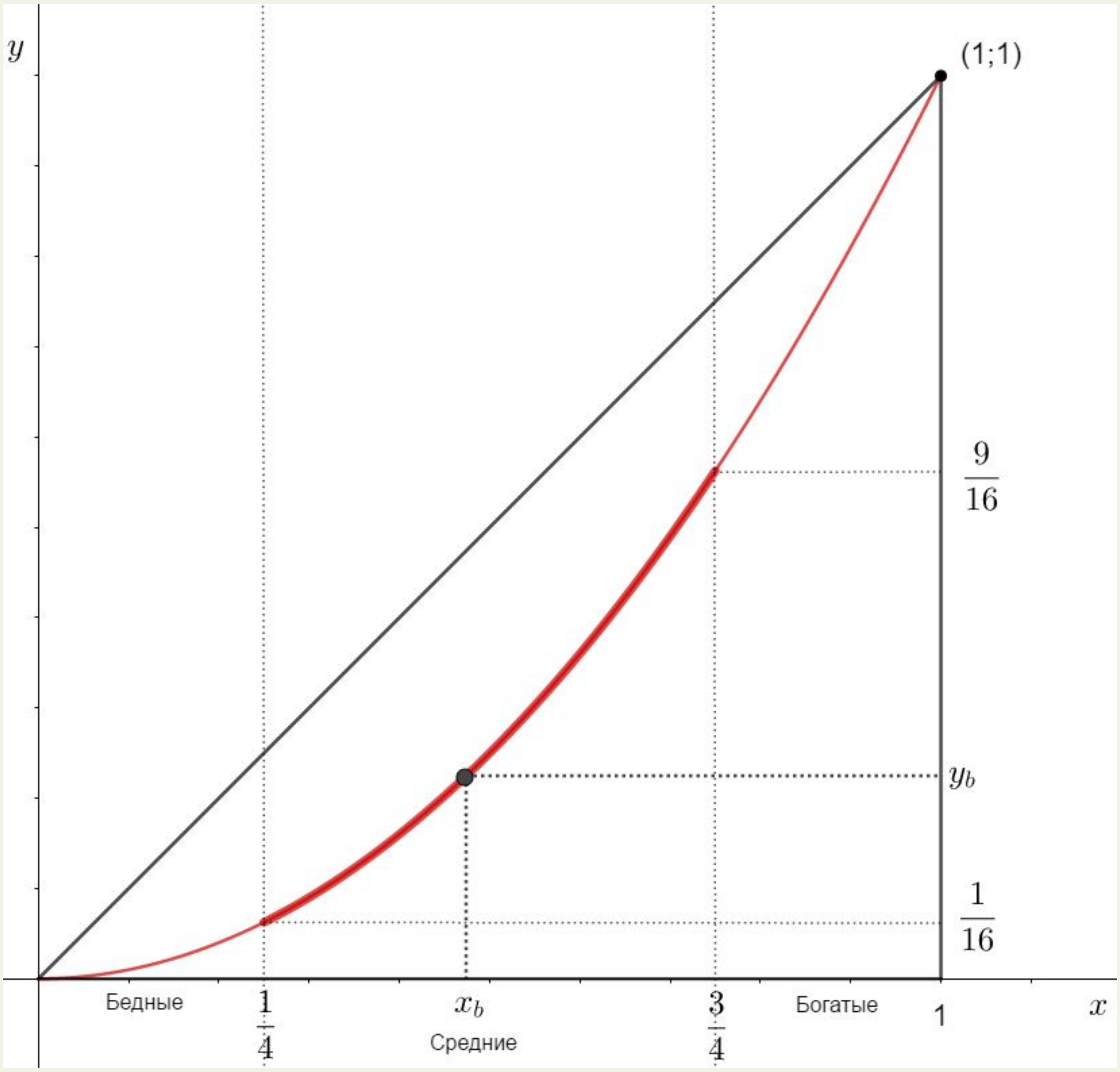


Рис. 135: Графическое изображение условия

Задачей является изобразить жирную линию, отражающую неравенство среди средних, как отдельную кривую Лоренца, и задать ее функцией.

Для этой цели существует довольно незамысловатый способ:

Возьмем случайную точку на изначальной кривой Лоренца (у меня она имеет координаты x_b и y_b). Этой точке будет соответствовать какая-то точка на новой кривой Лоренца (дадим ей координаты x_a и y_a). Известно, что человек, находящийся в этой точке, не изменит свое положение относительно других людей. Следовательно, слева и справа будет находится одинаковое количество людей.

На изначальной кривой Лоренца слева от этого человека среди средних была $x_b - \frac{1}{4}$ доля населения, а справа - $\frac{3}{4} - x_b$ доля населения. На новой кривой Лоренца, где средние растянутся не от $\frac{1}{4}$ до $\frac{3}{4}$, а от 0 до 1, слева будет $x_a - 0 = x_a$ доля населения, а справа - $1 - x_a$.

Так как данный человек не поменял место относительно других, то соотношения доли людей слева от него и доли людей справа должны не измениться, то есть верно будет следующее равенство:

$$\frac{x_b - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} - x_b} = \frac{x_a}{1 - x_a}$$

$$x_b = \frac{x_a}{2} + \frac{1}{4}$$

То же самое будет верно и для оси дохода:

$$\frac{y_b - \frac{1}{16}}{\frac{9}{16} - y_b} = \frac{y_a}{1 - y_a}$$

$$y_b = \frac{y_a}{2} + \frac{1}{16}$$

Нашей задачей является составить кривую Лоренца для средних, то есть функцию $y_a = f(x_a)$, которая будет говорить о том, какую долю доходов получают средние среди средних. Мы знаем зависимость y_b от x_b: $y_b = x_b^2$. Используя эту зависимость и ранее полученные зависимости, можем составить интересующую нас функцию:

$$y_b = x_b^2$$

$$\frac{y_a}{2} + \frac{1}{16} = (\frac{x_a}{2} + \frac{1}{4})^2$$

$$y_a = \frac{x_a^2}{2} + \frac{x_a}{2}$$

Вот мы и получили функцию, описывающую кривую Лоренца среди средних.

Внезапная теорема Вильсона Хчояна

Меня попросили добавить ее в учебник, а вам может быть полезно. Звучит она так:

Если кривая Лоренса описывается уравнением $y = x^{\alpha}$ или $y = 1 - (1 - x)^{\frac{1}{\alpha}}$ (вторая функция является обратной к первой относительно $y = 1 - x$), то коэффициент Джини будет равен $G = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$. Доказывается данное утверждение через интегралы, можете в этом потренироваться.

Сложение кривых Лоренца

Один из самых сложных видов задач на неравенство - это сложение кривых Лоренца в случае, например, объединения стран.

Допустим, в мире существует две страны с равными численностями населения и равными доходами. В первой стране наблюдается абсолютное равенство, тогда как во второй стране кривая Лоренца описывается уравнением $y_2 = x_2^2$. Необходимо найти кривую Лоренца в случае объединения данных стран в одну. На самом деле, такая задача является задачей оптимизации, так что у нее существует два классических метода решения: через предельные и через основные функции.

Решение через предельные функции (доходы людей)

Для решения такой задачи нам необходимо выстроить население стран в порядке возрастания дохода.

Для этого нам нужно понять, сколько получает каждый конкретный человек по формуле дохода из начала главы: $y'(x) * \frac{I}{N}$. Так как и I, и N по условию задачи между странами равны, можем их сократить без потери общности.

Нам нужно расчитать производные кривых Лоренца, чтобы понять доходы каждого человека.

Так как в первой стране полное равенство, то кривая Лоренца описывается функцией $y_1 = x_1$, то есть $y_1' = 1$. Получили, что каждый человек в первой стране зарабатывает 1 условную д.е.

Во второй стране $y_2 = x_2^2$, то есть $y_2' = 2x_2$. Таким образом, каждый человек зарабатывает по-разному, в зависимости от его положения по оси X. Так как $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$, то каждый человек во второй стране зарабатывает от 0 до 2 условных д.е. Найдем, в какой точке доход во второй стране равен доходу в первой:

$$2x_2 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Таким образом, ровно половина населения второй страны получает меньше, чем жители первой страны, а половина - больше.

Следовательно, на суммарной кривой Лоренца по оси X (по оси доли в населении), будет идти сначала половина населения второй страны (чей доход меньше, чем доход каждого человека в первой стране), затем все население первой страны, а затем вторая половина второй страны.

На графике это будет выглядеть следующим образом:

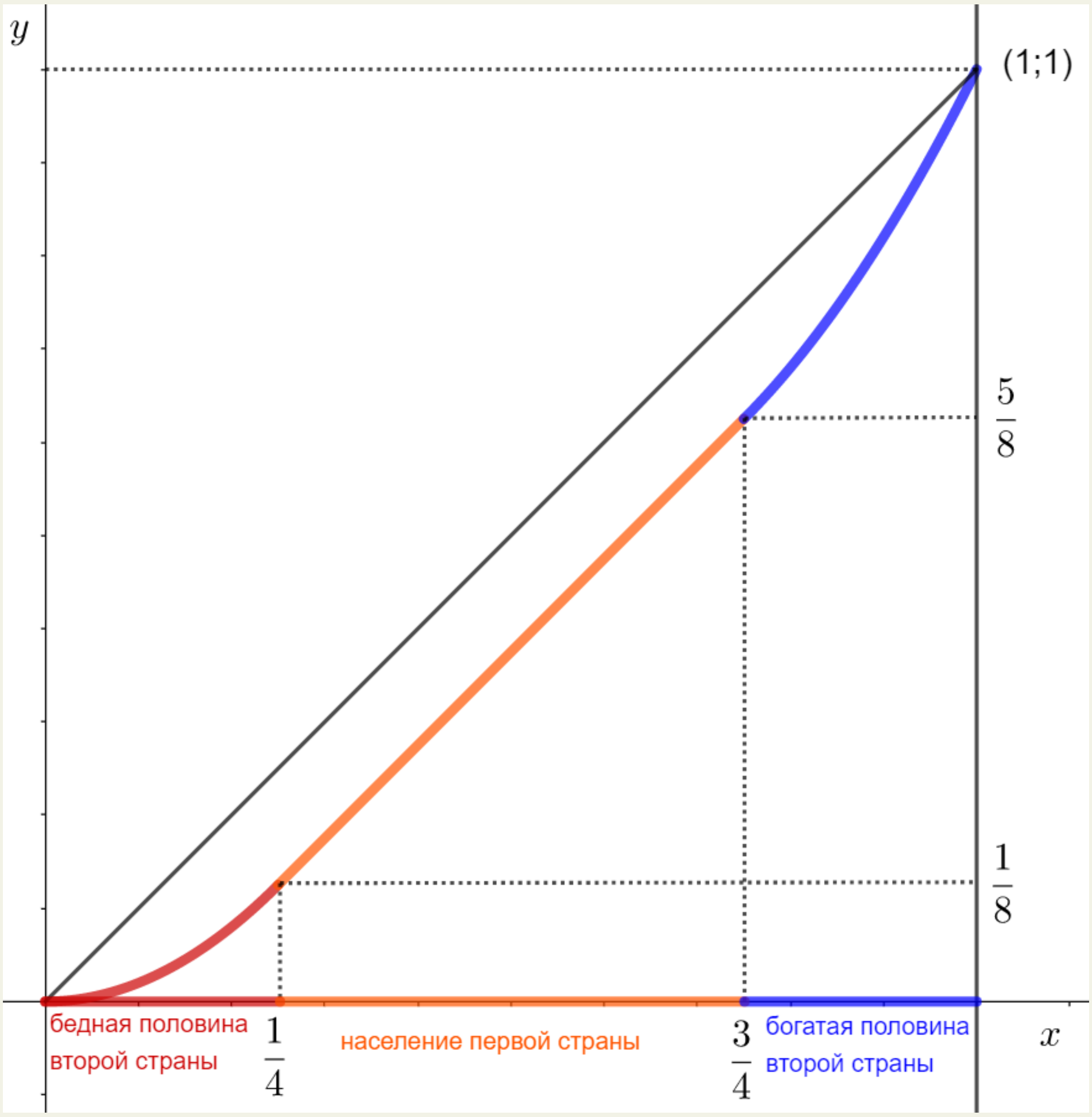


Рис. 136: Суммарная кривая Лоренца

Точки на оси Y находим следующим образом:

Рассчитаем, какие доли дохода получала бедная половина второй страны: подставим их в уравнение изначальной кривой Лоренца: $y_2 = x_2^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Таким образом, раньше бедная половина получала лишь $\frac{1}{4}$ от общей доли доходов, имея долю $\frac{1}{2}$ в населении. В суммарной кривой Лоренца суммарные население и доход увеличилось в 2 раза, следовательно, теперь они будут иметь $\frac{1}{8}$ доли в доходе и $\frac{1}{4}$ доли в населении.

Вторая точка перехода между группами:

Мы прибавляем к первой точке $\frac{1}{2}$ долю населения (все населения первой страны), которые будут иметь $\frac{1}{2}$ долю нового суммарного дохода, получая, соответственно, $\frac{3}{4}$ по населению и $\frac{5}{8}$ по доходу.

Теперь, чтобы выполнить задание построения кривой Лоренца, нам осталось построить уравнения каждого участка (их у нас 3). Это построение можно выполнить довольно большим количеством способов, здесь я приведу самый универсальный.

Проще всего построить уравнение прямой по двум точкам:

$$y = x - \frac{1}{8}$$

Найдем производную этой прямой:

$$y' = 1$$

Соответственно, на суммарной кривой Лоренца каждый житель первой страны также получает 1 у.е. Также известно, что столько же получает самый богатый из первой группы (красной), и столько же получает самый бедный из третьей группы (синей), то есть **производные их функций в точках** $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ также равны 1.

Найдем уравнение красной группы:

Мы знаем, что это парабола (так как изначально распределение имело форму параболы). Зададим ее как $y = ax^2 + bx + c$. Параболу можно построить по трем фактам. У нас они есть:

1) Она проходит через $(0; 0)$

2) Она проходит через $(\frac{1}{4}; \frac{1}{8})$

3) В точке $x = \frac{1}{4}$ ее производная равна 1

Производная нашей параболы выглядит как $y' = 2ax+b$. Запишем наши знания в виде системы:

$$\begin{cases} 0 = a * 0 + b * 0 + c \\ \frac{1}{8} = a * (\frac{1}{4})^2 + b * \frac{1}{4} + c \\ 1 = 2a * \frac{1}{4} + b \end{cases}$$

Решив систему, получаем, что $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$. Значит, уравнение этого участка имеет вид $y = 2x^2$.

То же самое проделаем для второго (синего) участка, Выпишем три факта:

1) Точка $(1; 1)$

2) Точка $(\frac{3}{4}; \frac{5}{8})$

3) Производная в точке $x = \frac{3}{4}$ равна 1.

Выписываем систему:

$$\begin{cases} 1 = a * 1 + b * 1 + c \\ \frac{5}{8} = a * (\frac{3}{4})^2 + b * \frac{3}{4} + c \\ 1 = 2a * \frac{3}{4} + b \end{cases}$$

Решив, получаем $a = 2$, $b = -2$, $c = 1$. Тогда уравнение имеет вид $y = 2x^2 - 2x + 1$.

Таким образом, мы нашли все нужные нам уравнения. Теперь запишем целиком получившееся уравнение кривой Лоренца:

$$\begin{cases} y = 2x^2 & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\ y = x - \frac{1}{8} & \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{3}{4} \\ y = 2x^2 - 2x + 1 & \frac{3}{4} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Решение через основную функцию (в лоб)

Данный метод сложения кривых Лоренца базируется на том, что для каждой конкретной доли в населении нужно найти минимальный доход, который может получать эта группа (в таком случае, мы по определению получим кривую Лоренца).

Для этого возьмем долю населения x_1 из первой страны и x_2 из второй страны. В суммарном населении это будет доля $x = \frac{x_1 * N + x_2 * N}{2N} = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Вспоминаем, что изначальные кривые Лоренца в задаче имели вид $y_1 = x_1$ и $y_2 = x_2^2$. Тогда доля в доходе выбранных нас групп будет равна $y = \frac{x_1 * I + x_2^2 * I}{2I} = \frac{x_1 + x_2^2}{2}$.

Так как мы должны получить функцию $y = f(x)$, добавим в формулу x, подставив его из соотношения $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_1 = 2x - x_2$$

$$y = \frac{x_1 + x_2^2}{2} = \frac{2x - x_2 + x_2^2}{2}$$

Теперь нам осталось проминизировать данную функцию по x_2, так как для каждой доли y мы выбираем минимальный уровень дохода, который она может получать.

$$y = \frac{2x - x_2 + x_2^2}{2} \xrightarrow{x_2} min$$
$$-x_2 + x_2^2 \xrightarrow{x_2} min$$
$$x_2^* = \frac{1}{2}$$

Проверяем оптимум на следующие ограничения: $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ и $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$. Переведем первое ограничение на x_2:

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant 2x - x_2 \leqslant 1$$
$$2x - 1 \leqslant x_2 \leqslant 2x$$

Проверяем по порядку: ограничения $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$ выполняются при $x_2 = \frac{1}{2}$. Проверяем остальные:

$$\frac{1}{2} \geqslant 2x - 1$$
$$\frac{3}{4} \geqslant x$$

Получается, при $x > \frac{3}{4}$ оптимум неверен, следовательно, мы берем выбившее нас ограничение $x_2 = 2x - 1$.

Проверяем последнее ограничение:

$$\frac{1}{2} \leqslant 2x$$
$$\frac{1}{4} \leqslant x$$

Тогда при $x < \frac{1}{4}$ мы также возьмем выбившее нас ограничение: $x_2 = 2x$.

Вот так выглядит оптимальный x_2 с учетом всех ограничений:

$$x_2 = \begin{cases} 2x & x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} \\ 2x - 1 & x < \frac{3}{4} \end{cases}$$

Подставив полученную функцию x_2 в изначальную функцию $y = \frac{2x - x_2 + x_2^2}{2}$, получим итоговую формулу кривой Лоренца:

$$\begin{cases} y = 2x^2 & x < \frac{1}{4} \\ y = x - \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} \\ y = 2x^2 - 2x + 1 & \frac{3}{4} < x \end{cases}$$

Финансы

В этой теме мы рассмотрим все непроизводственные отношения людей: управление личными сбережениями и бюджетом, а также торговлю ценными бумагами и другими непроизводственными активами.

Дисконтирование денежных потоков и приведенная стоимость

Любые банковские операция и торговля ценными бумагами связаны с денежными потоками в различных периодах времени. В этой главе мы разберем основные понятия, помогающие нам в межвременном подсчете денежных потоков.

Не секрет, что деньги в будущем для нас имеют меньшую ценность, чем деньги сейчас.

Это происходит, во-первых, из-за того, что сами по себе деньги ценности не имеют, а имеют ценность блага, которые мы можем на них купить. Так что возможность прямо сейчас иметь какое-то благо для нас более привлекательна, чем возможность иметь его через какое-то время.

Во-вторых, деньги, которые есть сейчас, можно куда-нибудь вложить (инвестировать в производство, положить в банк), и иметь большее количество денег в будущем.

В финансах мы пренебрегаем нашим субъективным восприятием денег и сосредотачиваемся на их применении. Соответственно, оценивая стоимость денег, мы будем рассматривать наши возможности их использования.

Здесь и далее мы будем иметь дело с процентной банковской ставкой. Для простоты в наших банках ставка по всем кредитам и депозитам будет одинакова и равна r. Например, 20% годовых будет соответствовать $r = 0.2$.

Переходим к основным определениям:

Дисконтирование - процесс приведения будущих денежных потоков к настоящему периоду. Процесс называется так из-за того, что будущим деньгам мы даем некий дисконт - снижаем их для нас ценность.

Как же проводить дисконтирование платежей? Допустим, нам заплатят через год 100 рублей. В случае, если у нас есть возможность воспользоваться банковскими услугами, мы прямо можем определить, чему равна ценность этого платежа для нас в настоящем времени. Для того, чтобы получить эти деньги прямо сейчас, нам нужно взять кредит в таком размере, чтобы выплатить его через год теми 100 рублями, которые нам заплатят. Какую же сумму нужно для этого взять в кредит?

Пусть это сумма равна X. В таком случае через год выплачивать нужно будет $X * (1 + r)$. Следовательно, верно будет, что:

$$X * (1 + r) = 100$$

$$X = \frac{100}{1 + r}$$

Эта величина ($\frac{100}{1+r}$) и есть приведенная стоимость нашей будущей зарплаты. Аналогично, если 100 рублей нам заплатят через 2 года, а не через год, то их приведенная стоимость будет равна $\frac{100}{(1+r)^2}$.

В общем виде, если существует какой-либо денежный поток (например, зарплата) в размере S через n лет от настоящего момента, то приведенная стоимость этого потока будет равна $\frac{S}{(1+r)^n}$.

NPV ($Net\,Present\,Value$) - Чистая Приведенная Стоимость чего-либо. Обычно считается NPV для какого-либо проекта вложения денежных средств.

Для начала рассмотрим NPV от вложения суммы S в банк (на депозит), чтобы снять половину от накопленной суммы через год и еще половину через два года.

В таком случае у нас будет три платежа: $-S$ в настоящем (мы потеряем S, положив их в банк). Тогда через год на нашем счету будет $S(1+r)$, итого через год мы получим платеж $\frac{S(1+r)}{2}$. На счету, соответственно, останется $\frac{S(1+r)}{2}$. Тогда еще через год эта сумма превратится в $\frac{S(1+r)}{2}*(1+r) = \frac{S(1+r)^2}{2}$. Всю эту сумму мы снимем через год.

Теперь приведем эти платежи к настоящему моменту: второй платеж (который через год) разделим на $(1+r)$, а третий (через 2 года) - на $(1+r)^2$. Теперь мы готовы вычеслить NPV нашего вложения:

$$NPV = -S + \frac{\frac{S(1+r)}{2}}{1+r} + \frac{\frac{S(1+r)^2}{2}}{(1+r)^2} = -S + \frac{S}{2} + \frac{S}{2} = 0$$

Более того, какой бы вами ни была стратегия по снятию этого депозита (снять все сразу через год, снимать только проценты каждый год и т.д.), NPV такого вложения все равно оказался бы равен 0 (можете проверить эти примеры самостоятельно).

В качестве другого примера рассмотрим проект, который сейчас требует вложений, равных 1000$, и который через год принесет нам выплату в 800$, через 2 года - 400$, а затем закроется. При этом известно, что банковская ставка равна 20%. Рассчитаем NPV этого проекта:

$$NPV = -1000 + \frac{800}{1+r} + \frac{400}{(1+r)^2} = -1000 + \frac{800}{1.2} + \frac{400}{1.44} \approx -56$$

Так как $NPV < 0$, то это значит, что вложить деньги в банк выгоднее, чем в данный проект, то есть проект не будет реализован. Если же в задаче получается, что $NPV > 0$, то данный проект будет реализован, так как оказывается, что можно взять на него кредит и в итоге остаться в плюсе (этот плюс, приведенный к настоящему моменту, и будет равен NPV проекта).

В исключительных случаях, когда ставки по кредитам и депозитам различаются, можно вычислить отдельно кредитный и депозитный NPV проекта. Замечу, что ставка по кредитам в таком случае всегда выше ставки по депозитам, а так как NPV отрицательно зависит от ставки, то кредитный NPV_{credit} будет ниже, чем депозитный $NPV_{deposit}$.

В таком варианте возможна ситуация, в которой $NPV_{credit} < 0 < NPV_{deposit}$, то есть вложить деньги в проект выгоднее, чем класть их в банк, но брать кредит ради реализации проекта невыгодно. В таком случае, даже несмотря на положительный NPV по депозитам, проект не будет реализован при отсутствии денег на его реализацию.

Банки, ставки, кредиты, депозиты

В первую очередь мы поговорим о банковском секторе, так как банки являются ключевыми агентами на финансовом рынке.

Депозиты и эффективная процентная ставка

Депозиты (они же банковские вклады) - это передача собственных средств банку во временное пользование. Банки инвестируют полученные депозиты, или же выдают их в кредит, получая с них прибыль. Соответственно, частью прибыли они деляться с лицом, положившим депозит, в качестве платы за использование его денег.

Депозит состоит из двух частей: **тела депозита** - суммы, которую вкладчик внес в банк, и **процентов** - суммы, которую банк заплатил за возможность пользоваться деньгами вкладчика

Существует много классификаций депозитов, они все отличаются условиями снятия и внесения средств. Мы же с вами разберем главное теоретическое понятие, а именно капитализацию вклада.

Капитализация депозита - это система, при которой проценты по депозиту прибавляются к телу депозита, и в дальнейшем на них также начисляются проценты.

При отсутствии капитализации расчеты по депозиту довольно просты: При получении суммы S на депозит без капитализации процентов, каждый год банк будет выплачивать $r * S$ денег, где r - годовая ставка процента. Обычно, при отсутствии капитализации, банк предлагает сразу же забирать начисленные проценты. Например, если не снимать проценты на протяжении n лет с депозита без капитализации процентов, то на депозите скопится сумма, равная $S + n * r * S = (1 + nr)S$.

Теперь разберем вариант с капитализацией на примере ежемесячной капитализации процентов. Оказывается, что если положить сумму S на вклад с номинальной ставкой в r годовых с ежемесячной капитализацией, то в через год сумма вклада увеличится на сумму, большую, чем $r * S$! Проценты действительно будут каждый месяц начисляться по озвученной годовой ставке, однако, капитализация процентов изменит итоговую сумму.

Итак, если проценты начисляются каждый месяц, то логично, что ежемесячное начисление будет составлять $\frac{1}{12}$ от годовой ставки. Именно так и считают ежемесячные проценты банки: каждый месяц проценты составляют долю $\frac{r}{12}$ от тела вклада. Однако, номинальная ставка не учитывает капитализацию процентов. Таким образом, уже после первого месяца тело вклада увеличивается на величину процентов, и теперь проценты начисляются по ставке $\frac{r}{12}$, но уже на увеличенный объем депозита.

В таком случае, проценты в первый месяц составят $S * \frac{r}{12}$, они прибавятся к сумме депозита, которая теперь составит $S*(1+\frac{r}{12})$, и следующие проценты уже будут равны $S*(1+\frac{r}{12})*\frac{r}{12}$, и после второго месяца сумма на вкладе составит $S(1 + \frac{r}{12})^2$. По аналогии, через 12 месяцев, то есть через год, сумма на вкладе будет равна $S*(1+\frac{r}{12})^{12}$. Напомню, в случае отсутствия капитализации, сумма по истечению срока составила бы $S * (1 + r)$.

Замечу, что $(1 + \frac{r}{12})^{12} > (1 + r)$, так как при раскрытии скобок слева получается функция $(1 + \frac{r}{12})^{12} = 1+r+f(r)$, где $f(r)$ - многочлен со степенями от 2 до 12 и положительными коэффициентами. Теперь мы можем дать определение эффективной ставке:

Эффективной годовой банковской ставкой называется ставка, на которую **реально** вырастет сумма за год при капитализации процентов в течение года. То есть r_e будет эффективной ставкой, если для нее верно, что $(1 + \frac{r}{12})^{12} = 1 + r_e$, где r - номинальная банковская ставка. Повторюсь, при наличии капитализации всегда будет верно, что $r_e > r$. Например, при номинальной ставке в 10% годовых ($r = 0.1$) и ежемесячной капитализации, эффективная ставка будет равна 10,47%. То есть, положив на депозит 1000 рублей под 10% годовых с ежемесячной капитализацией, через год вы сможете снять со своего счета 1104,7 рублей.

Кредиты

Кредит - это предоставление денежных средств банком во временное пользование лицу на определенный срок и за некоторую плату (по-русски - за проценты), которую необходимо будет оплатить вместе с возвратом средств. Как и у депозита, у кредита есть **тело** (сумма, взятая в кредит), и проценты (плата за использование кредита).

Кредитов, как и депозитов, существует множество: в основном, они отличаются схемой погашения долга перед банком. В этой главе мы разберем две основных схемы: дифференциированную и аннуитетную (читайте внимательно, на ЕГЭ пригодится). В примерах я буду рассматривать кредиты с одним ежегодным платежом.

Кредит с **дифференциированной** системой платежей предполагает **ежегодное уменьшение суммы задолженности перед банком на одну и ту же величину**. При сумме кредита S, взятого на n лет, дифференциированная система обозначает, что каждый год долг перед банком должен уменьшаться на $\frac{S}{n}$, и, таким образом, он будет выплачен ровно к концу срока. Платежи в такой системе называются дифференциированными, так как они отличаются из года в год. Это происходит из-за того, что каждый год заемщик выплачивает $\frac{S}{n}$ от тела кредита, но еще и все проценты, полученные за год. Так как сумма задолженности постоянно уменьшается, то и проценты тоже уменьшаются, из-за чего со временем сумма платежа уменьшается.

Таким образом, сначала банк начисляет проценты на сумму долга, затем должник выплачитвает $\frac{S}{n}$, а также проценты, равные rX, где X -сумма задолженности на текущий момент. Получается, что через m лет сумма долга банку будет равна $S - m\frac{S}{n} = \frac{(n-m)S}{n}$. Соответственно, проценты в этом году будут равны $r \cdot \frac{(n-m)S}{n}$. Тогда в сумме заемщик заплатит банку следующую сумму A (она состоит из основного долга и процентов):

$$A = S + r \cdot S + r \cdot \frac{(n-1)S}{n} + r \cdot \frac{(n-2)S}{n} + r \cdot \frac{(n-3)S}{n} + \dots + r \cdot \frac{S}{n}$$

Замечаем арифметическую прогрессию из n членов с первым членом $\frac{S}{n}$ и шагом $\frac{S}{n}$:

$$A = S + r(\frac{(\frac{S}{n} + S) \cdot n}{2}) = S + \frac{r(n+1)S}{2}$$

Соответственно, переплата по кредиту в таком случае составит $\frac{r(n+1)S}{2}$.

Кредит с **аннуитетной** системой платежей предполагает **равные платежи на протяжении всего периода выплат**. Таким образом, сумма задолженности уменьшается неравномерно: сначала довольно медленно (так как большая часть платежа идет на погашения процентов), а затем все быстрее и быстрее (так как проценты уменьшаются). Обозначим за X ежегодный платеж. В таком случае, снова, банк сначала увеличивает задолженность в $(1 + r)$ раз, затем поступает платеж X, затем на оставшуюся сумму снова начисляются проценты, и так далее. Учитывая, что сумма задолженности через n лет должна оказаться равной нулю, для кредита с аннуитетной системой платежей будет верно следующее равенство:

$$(\dots(((S(1 + r) - X)(1 + r) - X)(1 + r) - X)\dots) - X = 0$$
$$S(1 + r)^n - X(1 + r)^{n-1} - X(1 + r)^{n-2} \dots - X = 0$$

Теперь уже замечаем геометрическую прогрессию с первым членом X и шагом $(1 + r)$:

$$S(1 + r)^n = \frac{X((1 + r)^n - 1)}{(1 + r) - 1}$$
$$S(1 + r)^n = \frac{X((1 + r)^n - 1)}{r}$$

Из этого соотношения можно, например, выразить X и рассчитать сумму, которую нужно будет платить каждый год, если вы хотите взять кредит суммой S на n лет под r годовых:

$$X = \frac{rS(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

Для примера: если взять 1 000 000 рублей на 10 лет под 10% годовых, то сумма ежегодного платежа по данной формуле составит $X = \frac{0.1 \cdot 1000000 \cdot 1.1^{10}}{1.1^{10} - 1} \approx 162745$.

В практике кредитов физическим лицам платежи обычно ежемесячные, и рассчитываются точно таким же способом.

Ценные бумаги

Ценными бумагами называются бумаги, имеющие какую-то ценность (логично, не так ли?), то есть те бумаги, которые можно продать или купить по ненулевой цене. В этом разделе мы рассмотрим основные виды ценных бумаг, а также то, как они взаимосвязаны.

Виды ценных бумаг

Облигация

Облигация - долговая ценная бумага. В экономическом смысле ничем не отличается от **векселя** (отличие только в неинтересной нам правовой структуре). Тот, кто выпустил облигацию, называется **эмитентом**, а тот, кому она принадлежит – держатель.

Разберем обязательные атрибуты облигации. Во-первых, это **срок погашения**: момент времени, когда держатель облигации может потребовать выплату в размере номинальной стоимости - суммы, которую эмитент обязуется выплатить. Также, облигация практически всегда обладает **купоном**: это регулярная выплата держателю облигации от эмитента. Купон может быть нулевым: в таком случае держатель облигации не получает никаких денег до срока погашения облигации.

Таким образом, доходность от облигации делится на два типа: купонную (выплаты по купону), и дисконтную (разница между реальной ценой покупки и номинальной ценой облигации). В случае высоких купонов цена облигации может оказаться больше ее номинальной стоимости: потери при инвестировании компенсируются большими купонными выплатами.

Облигация бывает именная или на предъявителя. В первом случае выплату по облигации может получить только указанное в ней лицо, во втором - любой непосредственный владелец облигации.

Доходность облигации (ее рентабельность) рассчитывается как соотношение прибыли к затратам на приобретение облигации, где прибыль - это номинальная разница между ценой покупки и номинальной стоимостью на момент погашения. Например, облигация сроком на год, с номинальной стоимостью в 1100 рублей и ежегодным купоном в 100 рублей, которая сейчас продается за 1000 рублей, будет иметь доходность в $\frac{1100+100-1000}{1000} = 0.2$, то есть 20% годовых. Отсюда следует, что чем выше цена облигации, тем меньше ее доходность.

Акция

Акция - ценная бумага, подтверждающая право держателя акции на владение долей компании. Владение акцией дает два основных преимущества: получение **дивидендного дохода** (той части прибыли, которая не была потрачена в качестве инвестиций обратно в компанию), а также голос на акционерном собрании.

Дивидендный доход на каждую акцию определяется совместно советом директоров компании и акционерного собрания. Размер получаемого дохода всегда пропорционален количеству акций (каждая акция приносит равный дивиденд).

Право голоса на собрании акционеров также определяется количеством акций (1 акция = 1 голос). На собрании акционеров принимаются общие концепты развития компании. Обычно для принятия решения требуется набрать более половины голосов акционеров. Таким образом, в случае владения более 50% акций компании, лицо имеет возможность единолично управлять вектором развития компании. В таком случае говорят, что лицо обладает **контрольным пакетом акций**.

Акции делятся на привелегированные и обыкновенные. Привелигированные акции очень сильно отличаются от компании к компании: они отличаются от обыкновенных возможностью или отсутствием права голоса. Обычно привелегированные акции отличаются тем, что приносят не только дивидендный доход, но и другие виды дохода (например, иногда купонный), а также они довольно часто имеют приоритетную выплату в случае банкротства компании.

Выпуск акций какой-либо компанией называется **публичным предложением**$(PO - Public offerin$
Наибольший интерес всегда проявляется к IPO $(Initial\ Public\ Offering)$ - первоначальному публичному предложению, когда компания впервые выпускает акции для продажи. Это происходит из-за того, что многие считают, что смогут сыграть на разнице между ориентировочной ценой продажи и их рыночной стоимостью.

Опцион

Опцион - ценная бумага, дающая **право** на какую-либо сделку. Основные два вида опицонов - пут-опцион (право продать), и колл-опцион (право купить). Обычно опционы не торгуются на рынке, так как являются сделкой между двумя контрагентами, но никто не запрещает продать свое право какому-либо лицу за определенную сумму.

Эммитент опциона продает право держателю опциона, получая за это некоторую **премию** (по сути, премия - это цена опциона). Таким образом, у эммитента появляется обязательство на совершение какой-либо сделки, а у держателя - право на осуществление этой сделки.

Обычно за исполнением опциона следит биржа, на которой торгуются соответствующие опционы, и в случае неисполнения обязательств накладывает на эмитента значительный штраф.

Обязательные атрибуты опциона - **срок исполнения** и **цена исполнения** (*strike price*), а также благо, то есть объект купли-продажи. Например, если Вася продал Пете колл-опцион на килограмм моркови сроком исполнения в год и ценой исполнения в 10 руб/кг, то через год Петя может воспользоваться им и купить у Васи килограмм моркови за 10 рублей, а Вася обязан будет продать этот килограмм.

На этом же примере разберем, кому приносит прибыль опцион и в каком размере. Допустим, Вася продал Пете колл-опцион на морковку с сроком исполнения в год и ценой исполнения в 10 рублей за 4 рубля (4 рубля - это **спот** цена (*spot price*), реальная цена, по которой торгуется актив). При цене морковки через год ниже 10 рублей Петя не воспользуется своим опционом: зачем покупать за 10, если можно купить дешевле. Получается, выгоду с опциона Петя может получить только в случае, если цена на морковку через год составит больше 10 рублей. В таком случае, при цене морковки P_m, можно будет использовать опцион для покупки морковки за 10 рублей, чтобы потом продать ее за P_m рублей (это будет платеж, который приносит опцион). Соответственно, выручка от использования опциона составит $P_m - 10$ рублей. В таком случае чистая прибыль Пети составит $P_m - 10 - 4 = P_m - 14$, при $P_m > 10$, и -4 при $P_m \leqslant 10$. Естественно, прибыль Васи противоположна прибыли Пети: он либо получает то, что потерял Петя, либо, наоборот, проиграет сумму, которую Петя выиграл. Нарисуем выигрыши Пети и Васи в зависимости от цены морковки через год на графике:

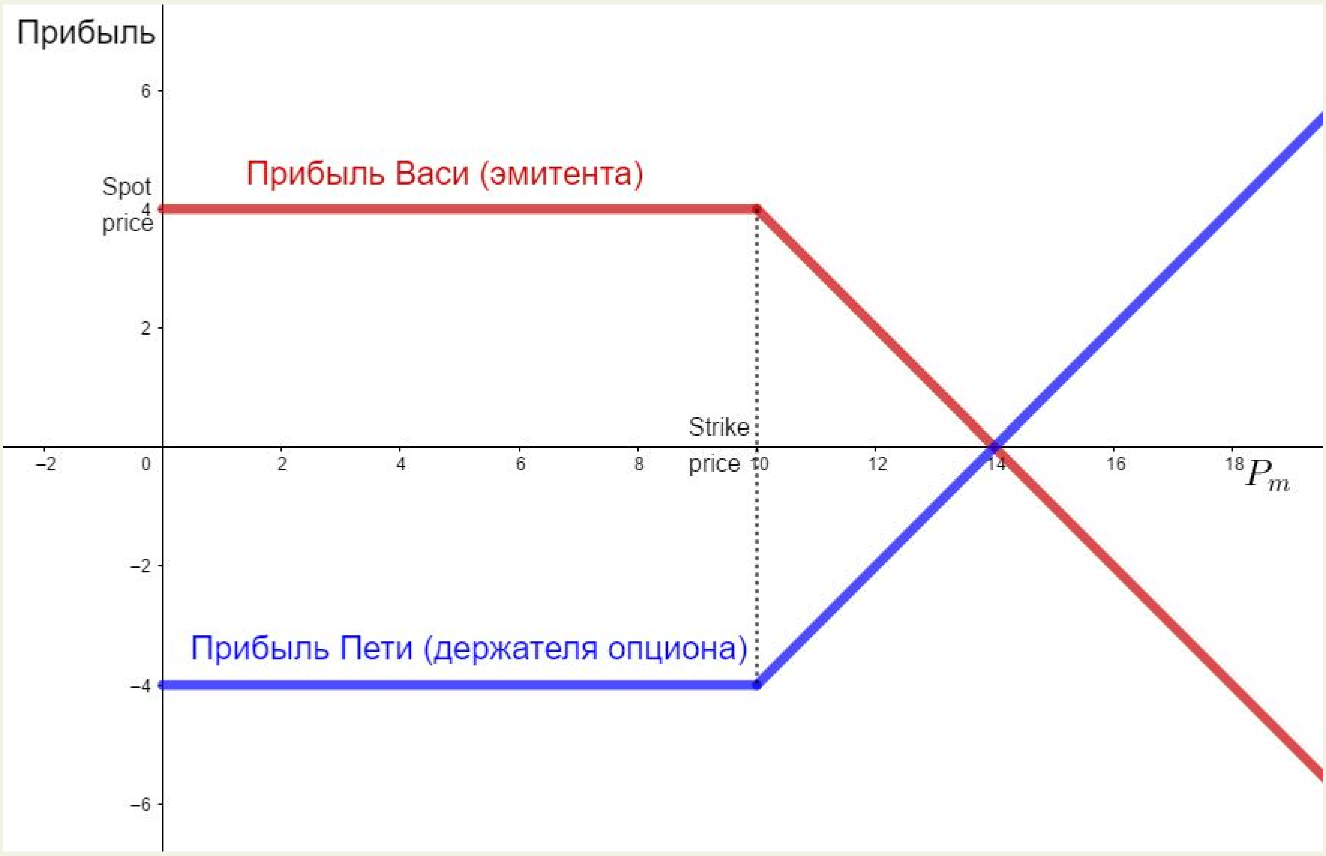


Рис. 137: Выигрыши эмитента и держателя колл-опциона в зависимости от цены торгуемого товара.

С точностью до наоборот работает пут-опцион:

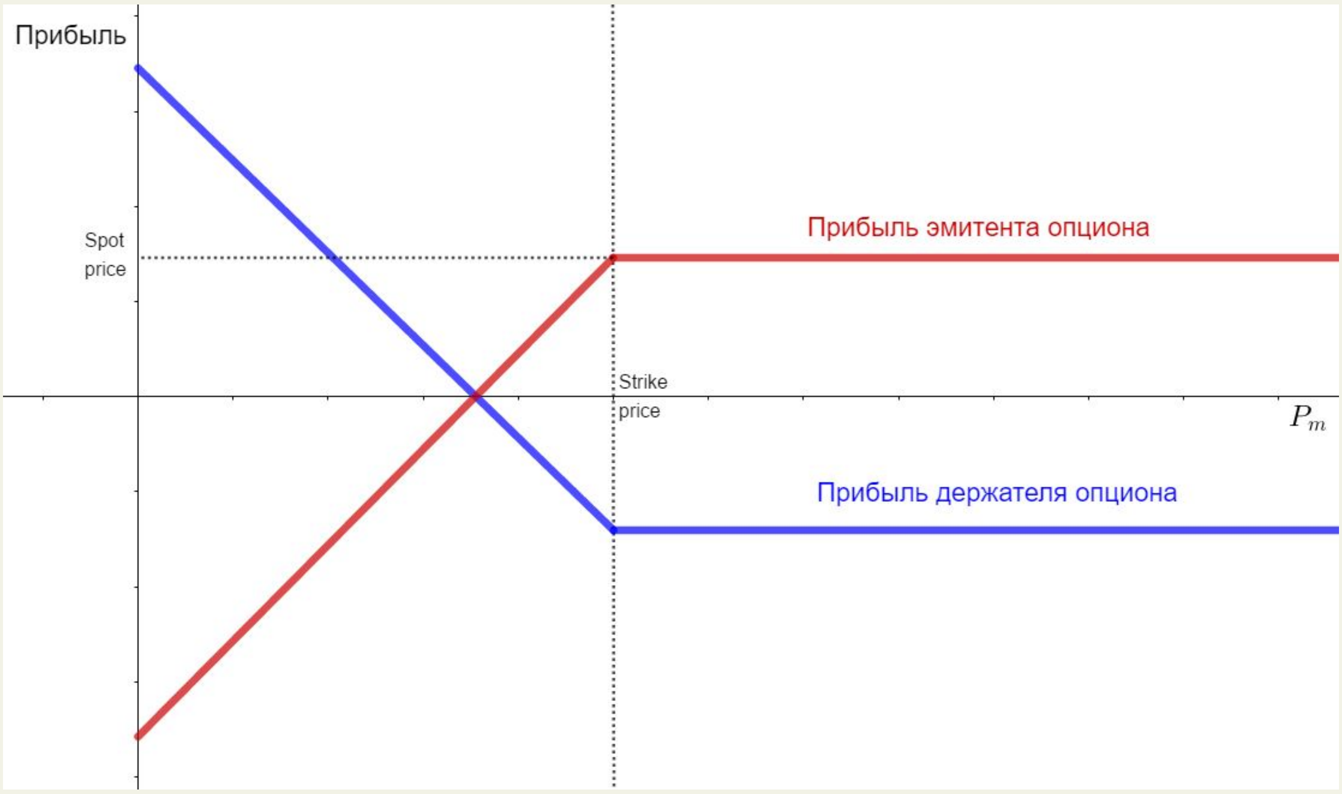


Рис. 138: Выигрыши эмитента и держателя пут-опциона в зависимости от цены торгуемого товара.

Форварды и фьючерсы

Форварды и фьючерсы - это контракты купли-продажи (поставки), которые заключившие данный контракт лица договорились исполнить в будущем. Главное отличие заключается в том, что форвард - это внебиржевой контракт, который составляется разово в целях поставки, а фьючерс - контракт, за исполнением которого следит биржа и обязательства и права по которому можно продать.

У форвардов и фьючерсов также есть обязательные атрибуты: срок исполнения и цена исполнения (довольно часто данная цена равна цене на момент заключения контракта).

Что интересно, фьючерсные контракты на поставку товара могут не исполняться: вместо поставки между двумя сторонами товара могут пройти лишь денежные расчеты, равные разнице стоимости поставки между ценой, прописанной в контракте и ценой исполнения контракта. В таком случае говорят, что фьючерс беспоставочный, или расчетный. Например, если Вася и Петя заключили фьючерс о том, что Вася через год продаст, а Петя приобретет морковку за 10 рублей, а через год цена морковки составит 14 рублей, то от такого контракта Петя будет в плюсе на 4 рубля, а Вася - в минусе (чтобы исполнить контракт, ему нужно купить морковку за 14 рублей и продать за 10). В таком случае Вася просто может дать Пете 4 рубля, и они будут в расчете. Таким образом, Петя мог бы продать свою сторону контракта на бирже за 4 рубля, что также делает фьючерс ценной бумагой.

В условиях фьючерса может стоять фиксированная форма (поставочный или беспоставочный), однако может стоять и свободная: в таком случае стороны договариваются, как именно будет проходить исполнение договора.

Торговля ценными бумагами и нахождение рыночной цены активов

Ценные бумаги в большинстве своем свободно обращаются на фондовой бирже. При этом, практически все бумаги так или иначе связаны друг с другом: например, стоимость компаний, добывающих нефть, положительно зависит от цены нефти, а компаний, производящих бензин - отрицательно. Таким образом, при колебании цены нефти цены акций данных компаний будут меняться в противоположные стороны. Рассчитать все колебания практически (а иногда даже теоретически) невозможно, так что в финансовых задачах применятся упрощенные модели торговли активами.

Здесь стоит сразу познакомиться с важным понятием в биржевой торговле, а именно экономическим арбитражем:

Экономический арбитраж - возможность получения мгновенной и гарантированной прибыли путем совершения серии сделок. Разберем данное явление на примере: допустим, евро торгуется по цене 2 доллара, евро торгуется по цене 100 рублей, а доллар торгуется по цене 70 рублей. В таком случае на рынке присутствует возможность арбитража: можно приобрести евро за 100 рублей, обменять на два доллара, и затем обменять их на 140 рублей, получив мгновенную и гарантированную прибыль. В таком случае, при обнаружении возможности арбитража, агенты начинают совершать **арбитражные сделки**. В результате таких сделок стоимость евро в рублях будет увеличиваться (на него предъявляют большой спрос), а стоимость доллара будет уменьшаться (его все пытаются продать). Таким образом, после осуществления арбитражных сделок возможность арбитража исчезает. При возникновении арбитража на бирже он также быстро закрывается агентами, которые ищут возможности арбитража. Получается, что при наличии возможности арбитража цена актива будет стремительно меняться, пока не достигнет устойчивого уровня - это значит, что возможность арбитража довольно быстро исчезает.

Еще один важный термин в биржевой торговле - **игра на понижение**, или **короткая позиция**, или просто **шорт** (от англ. *short selling*) - продажа активов, которыми ты не владеешь. Обычно такие сделки происходят с помощью вспомогательных сделок: агент берет в долг ценную бумагу с обязательством вернуть ее через какое-то время. После того, как бумага взята в долг, ее можно продать, но потом нужно будет обязательно ее выкупить и отдать. Короткая позиция применяется в случае уверенности в том, что цена актива в будущем снизится, и отдавать придется меньшее количество денег, чем то, которое агент заработает в момент продажи.

В этой главе мы разберем, как искать цену бумаги, зная цены других скоррелированных с ней активов в условиях отсутствия арбитража и с использованием шортинга (короткой позиции), на примере конкретной задачи:

Итак, известно, что на рынке торгуются акции корпорации $'Umbrella'$ по цене $P_a = 50$. Также известно, что в течение завтрашнего дня либо будет дождь, либо его не будет. В случае, если дождь пойдет, стоимость акции $'Umbrella'$ составит $P_{a(1)} = 100$, а если дождя не будет, то $P_{a(2)} = 20$. Также известно, что сейчас на рынке торгуется пут-опцион на акцию корпорации $'Umbrella'$ по цене $P_{put} = 10$ с ценой исполнения в 40 и сроком исполнения на завтрашний день. Сколько на таком рынке будет стоить колл-опцион на акцию $'Umbrella'$ с ценой исполнения в 60 и сроком исполнения в день? (Здесь мы будем считать, что существует какая-то ставка дисконтирования (банковская ставка на один день), но мы ее не знаем).

Сначала рассчитаем платежи пут- и колл-опциона через день. Пут-опцион дает нам право продать акцию по цене 40. В случае, если акция будет стоить 100, опцион оказывается бесполезен (он будет стоить 0 на рынке), а в случае, если акция будет стоить 20, он может принести прибыль: владея только опционом, можно будет приобрести акцию за 20, и воспользоваться правом продать ее за 40, заработав, тем самым 40-20=20. Получается, что опцион в таком случае принесет платеж 20 (то есть будет стоить 20).

Такие же рассуждения про колл-опцион с ценой исполнения в 60: он дает право купить акцию за 60. В случае, когда акция стоит 20, он бесполезен, а если акция стоит 100, то можно, владея опционом, купить ее за 60 и продать за 100. В таком случае опцион будет стоить 100-60=40.

Представим нашу задачу графически:

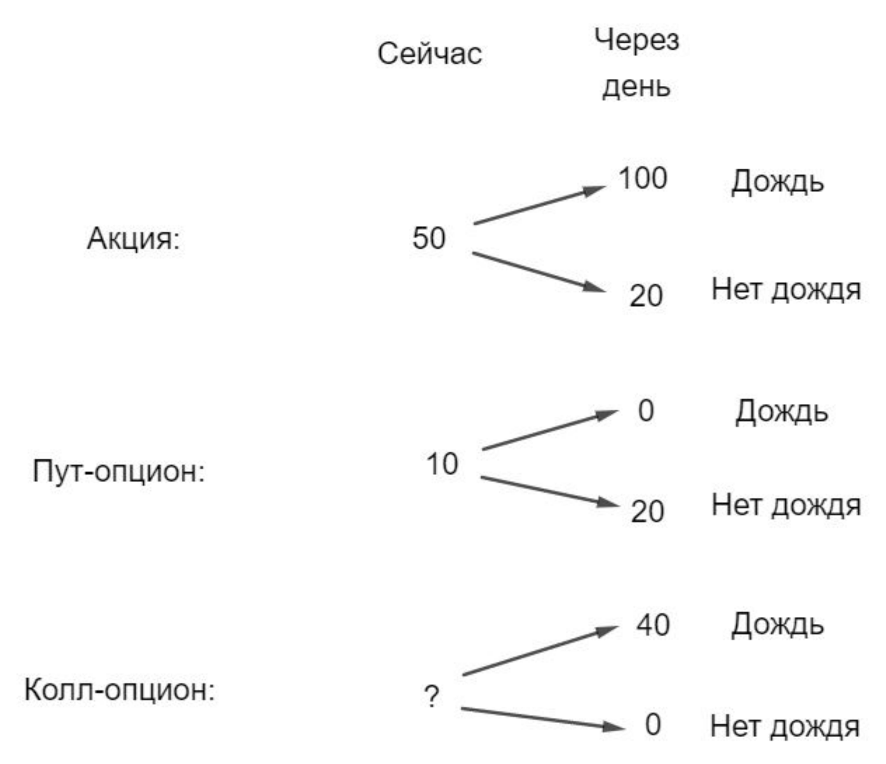


Рис. 139: Задача на определение цены колл-опциона

Как вы можете заметить, для определения цены нам важны только платежи бумаги, а нее ее суть (опцион это, акция и т.д.). Вид ценной бумаги нужен лишь для того, чтобы рассчитать эти ее платежи. Приступим к решению задачи:

Самый простой метод решения задач на поиск цены актива: это метод реплицирования портфеля. В этом методе мы заменяем бумагу с неизвестной ценой комбинацией других бумаг таким образом, чтобы платежи в любом возможном случае оказались точно такими же (собираем одну ценную бумагу из других ценных бумаг). Например, в нашей задаче можно собрать колл-опцион комбинацией какого-то количества акций и пут-опицонов. Обозначим за x количество акций, которые мы приобретем, а за y - количество пут-опционов.

В таком случае через день мы будем обладать количеством денег, равным $100x + 0y = 100x$, а при отсутствии дождя - $20x+20y$. Так как мы стараемся собрать портфель, точь-в-точь повторяющий колл-опцион, то выплаты в каждом случае должны совпадать с выплатами колл-опциона: 40 в случае дождя и 0 в случае его отсутствия. Получается, что должна выполняться следующая система:

$$\begin{cases} 100x = 40 \\ 20x + 20y = 0 \end{cases}$$

Решив систему, находим, что $x = 0.4$, $y = -0.4$ (не забываем, что в олимпиадной экономике все величины абсолютно делимы, в том числе и ценные бумаги). Как вы можете заметить, оказалось, что в целях составления реплицирующего портфеля необходимо **продать** некоторое количество пут-опционов. Это можно сделать и при отсутствии их у нас: все бумаги на рынке можно шортить. Для большей ясности разберем, как работает наш портфель:

Мы приобретаем 0.4 акции (при необходимости, берем кредит), а также берем в долг 0.4 пут-опциона и продаем их. Через день мы выкупаем обратно 0.4 пут-опциона и отдаем в долг. Тогда в случае дождя акция принесет $100 \cdot 0.4 = 40$, а пут-опцион можно будет приобрести бесплатно. В случае отсутствия дождя акция принесет $20 \cdot 0.4 = 8$, но нам нужно будет вернуть опцион, который будет стоить также $20 \cdot 0.4 = 8$. Таким образом, в случае отсутствия дождя мы будем обладать нулевым количеством денег. Точно такие же платежи принесет нам колл-опцион в каждом случае.

Итак, мы собрали портфель, в точности реплицирующий один колл-опцион. В таком случае, стоимость этого портфеля должна в точности равняться стоимость колл-опциона! Иначе на рынке будет присутствовать возможность арбитража: если два одинаковых актива торгуются по разным ценам, то можно шортить дорогой и покупать дешевый, получая моментальную прибыль! Найдем стоимость нашего портфеля P_p:

$$P_p = 50x + 10y = 50 \cdot 0.4 + 10 \cdot (-0.4) = 16$$

Так как портфель эквивалентен колл-опциону, то и стоимость опциона будет такой же: $P_{call} = P_p = 16$

Вот мы и научились торговать ценными бумагами в теоретической экономике.

Макроэкономика

Мы приступаем к большому и одному из последних разделов в олимпиадной экономике. Макроэкономика изучает не конкретные рынки, а экономику в целом: какие процессы в ней происходят и как ее контролировать, чтобы обеспечивать рост и не допускать кризисов. В этой главе мы изучим все основные понятия и главные величины, используемые в макроэкономическом анализе.

Основные понятия макроэкономики

Даже тот, кто впервые решил окунуться в олимпиадную экономику, слышал, скорее всего, что такое ВВП.

ВВП (**Внутренний Валовый Продукт**) - суммарная конечная стоимость всех товаров и услуг, произведенных на территории страны. Обычно ВВП расчитывается за 1 год и является основной мерой экономики страны. Сразу же хочется сказать о похожем понятии:

ВНП (**Валовый Национальный Продукт**) - суммарная конечная стоимость всех товаров и услуг, произведенных **резидентами** страны. Обычно ВВП чаще используется в макроэкономическом анализе (в нашей теоретической олимпиадной экономике ВНП вообще больше встречаться не будет).

Различие между ВВП и ВНП заключается в том, в ВВП, в отличие от ВНП, включает в себя товары, произведенные на территории страны иностранными резидентами, и не включает в себя товары, произведенные зарубежом отечественными производителями.

Номинальный и Реальный ВВП и связанные с ними индексы экономического роста и инфляции

Попробуем рассчитать ВВП страны на примере задачи.

Рассмотрим страну, в которой производятся хлеб, масло и танки. Вы можете увидеть произведенные количества товаров и их цены в 2019 и 2020 годах:

	Масло	Хлеб	Танки
Q_{2019}	100	1000	1
P_{2019}	100	10	10000
Q_{2020}	50	1500	2
P_{2020}	200	12	10000

Можем рассчитать ВВП страны в 2019 и 2020 годах по определению: нужно найти суммарную стоимость товаров и услуг, произведенных за год. ВВП обозначается переменной Y:

$$Y_{2019} = 100 \cdot 100 + 1000 \cdot 10 + 1 \cdot 10000 = 30000$$

$$Y_{2020} = 50 \cdot 200 + 1500 \cdot 12 + 2 \cdot 10000 = 48000$$

Сейчас мы с вами рассчитали так называемые **номинальные** ВВП для каждого года. Номинальным ВВП (Y_n) называется ВВП, подсчитанный в ценах текущего года. Однако, есть второе, смежное понятие: **реальный** ВВП (Y_r), показывающий объем производства товаров. Но во время подсчета реального ВВП возникает проблема: некоторые товары имеют большую долю в экономике, а некоторые – совсем маленькую. Например, мы не может сравнить один танк с одной буханкой хлеба: для производства танка нужны на порядок большие мощности.

Поэтому каждому принято давать какой-то «вес» в экономике. Самое логичное – дать товару вес, равный его цене, ведь именно она отражает и издержки производства товара, и его ценность для потребителя. Таким образом, чтобы посчитать реальный ВВП, каждому товару дается вес, равный его цене в каком-то одном году (этот год называется базовым), и все вычисления идут в ценах базового года. Чаще всего базовым годом берется самый ранний из тех, что представлены в выборке (в нашем случае это 2019). Таким образом, **номинальный и реальный ВВП в базовом году совпадают**.

Все же посчитаем реальные ВВП за два года при базовом 2019 (в ценах 2019):

$$Y_{r2019} = 100 \cdot 100 + 1000 \cdot 10 + 1 \cdot 10000 = 30000$$

$$Y_{r2020} = 50 \cdot 100 + 1500 \cdot 10 + 2 \cdot 10000 = 40000$$

Так как обе величины посчитаны в одних и тех же ценах, с помощью реальных ВВП можно найти **темп экономического роста** (g) (он же индекс физического производства), то есть то, насколько выросло реальное производство товаров и услуг:

$$g = \frac{Y_{r2020}}{Y_{r2019}} = \frac{4}{3} = 1,(33)$$

Таким образом, мы можем сказать, что годовой темп экономического роста составил около 33%.

Также с помощью реальных и номинальных величин можно посчитать **инфляцию** (скорость роста цен) в стране.

Существуют две основные меры подсчета инфляции: **Дефлятор ВВП** и **Индекс Потребительских Цен (ИПЦ)**.

Дефлятор ВВП рассчитывается как отношение номинального ВВП к реальному и по сути отражает, как изменились цены по сравнению с базовым годом, так как номинальный и реальный ВВП учитывает один и тот же набор товаров и услуг, но подсчитанный в разных ценах:

$$Deflator_{2020} = \frac{Y_{n2020}}{Y_{r2020}} = \frac{\sum(P_{2020} \cdot Q_{2020})}{\sum(P_{2019} \cdot Q_{2020})} = \frac{48000}{40000} = 1,2$$

Мы получили, что в 2020 году цены выросли в 1,2 раза по сравнению с 2019 годом. Таким образом, инфляция, рассчитанная с помощью дефлятора, составила 20%.

Индекс Потребительских Цен (ИПЦ) (*Consumer Price Index* (*CPI*)) считает инфляцию по другому принципу. В базовом году (опять же, обычно это самый ранний год из выборки, у нас 2019), определяется **потребительская корзина** - набор товаров, которые приобретает население для потребления. Как вы можете заметить, танки население для потребления не приобретает, значит, они не будут включены в состав потребительской корзины, и там будет только хлеб и масло. После определения корзины необходимо рассмотреть, как ее стоимость изменилась по сравнению с базовым годом. Это и будет Индекс Потребительских Цен. Рассчитаем:

В нашей корзине будет 100 единиц масла и 1000 единиц хлеба. В таком случае стоимость корзины в каждом году составит:

$$S_{2019} = 100 \cdot 100 + 1000 \cdot 10 = 20000$$

$$S_{2020} = 100 \cdot 200 + 1000 \cdot 12 = 32000$$

Можем расчитать ИПЦ 2020 года:

$$CPI_{2020} = \frac{S_{2020}}{S_{2019}} = \frac{32000}{20000} = 1,6$$

Здесь мы получили, что цены для населения в 2020 году выросли на 1,6, то есть на 60%.

Также существует **Индекс Фишера** (*Fisher Price Index* (*FPI*)), которые обобщает два вышеназванных способа подсчета инфляции и является средним геометрическим между Дефлятором и ИПЦ:

$$FPI_{2020} = \sqrt{Deflator_{2020} \cdot CPI_{2020}} = \sqrt{1,2 \cdot 1,6} \approx 1,39$$

Таким образом, инфляция в 2020 году по индексу Фишера составила около 39%.

Безработица

Индекс безработицы – довольно важный индекс в макроэкономическом анализе, который нужно уметь рассчитывать всем олимпиадникам. По очереди разберемся со всеми аспектами безработицы и с тем, как она связана с благосостоянием страны.

Структура населения и подсчет безработицы

Пройдемся по тому, какие группы в населении принято выделять с точки зрения экономики.

В первую очередь, все население страны (N) делится на **Трудоспособное** ($Able - Bodied\ Population$ (ABP)) и **Нетрудостпособное** ($Not\ Able - Bodied\ Population$ ($NABP$)). К нетрудоспособному населению обычно относят несовершеннолетних, пенсионеров и людей, не имеющих возможности работать по причинам инвалидности или хронических болезней.

Трудоспособное население, в свою очередь, делится на **Экономически Активное Население (ЭАН)** (Рабочую силу, *Labor Force* (*LF*)) и **Экономически Неактивное население (ЭнАН)** (Людей, выбывших из состава рабочей силы, $Not\ Labor\ Force$ (NLF)). Если объяснять простым языком, то в ЭАН входит трудоспособное население, которое **хочет** работать, а в ЭнАН - трудоспособное население, которое **не хочет** работать.

Наконец, Экономически Активное Население делится на **занятых** (тех, кто работает, *Employed* (E)) и **безработных** (тех, кто не работает, *Unemployed* (U)).

Безработица (*unemployment* (u)) высчитывается как отношение безработных к экономически активному населению:

$$u = \frac{U}{LF} = \frac{U}{U+E}$$

Виды безработицы

Различают четыре основных вида безработицы:

Сезонная безработца обозначает безработицу, связанную с людьми, не имеющими работы из-за годовой сезонности (например, работники горнолыжной сферы летом или курортного бизнеса зимой). Довольно часто сезонную безработицу не учитывают при макроэкономическом анализе, так как она лишь вносит некоторые колебания в данные, и не отражает происходящие в экономике процессы.

Фрикционная безработица - безработица, связанная с процессом поиска работы, например, после увольнения со старой. Обычно фрикицонные безработные являются таковыми совсем недолгое время, так как по итогу находят себе работу.

Структурная безработица - безработица, связанная с изменениями структуры производства (например, сокращение рабочих мест при автоматизации производства).

Естественная безработица - обобщенное название всех трех вышеупомянутых видов безработицы. Сумма данных трех видов безработицы называется естественной, так как сезонность, процесс поиска работы и изменения структуры производства - естественные экономические процессы.

Циклическая безработица - безработица, связанная с **экономическим циклом**. Подробнее об этом поговорим в следующем разделе.

Экономический цикл

Рыночная экономическая система предполагает саморегулирование - процесс, когда экономика приходит к равновесию в отсутствие каких-либо внешних факторов и государственного контроля. Из-за отсутствия внешнего регулирования рыночная экономика оказывается подвержена значительным колебаниям. Данные колебания достаточно хорошо изучены и похожи друг на друга, и повторяющиеся из раза в раз периоды в развитии мировой экономики (или экономики страны) стали называть **экономическими циклами**.

Рассмотрим график, показывающий логарифмированный ВВП США в зависимости от года (здесь логарфимирование помогает объективно взглянуть на данные из-за их экспоненциальности, необходимая мера при анализе ВВП):

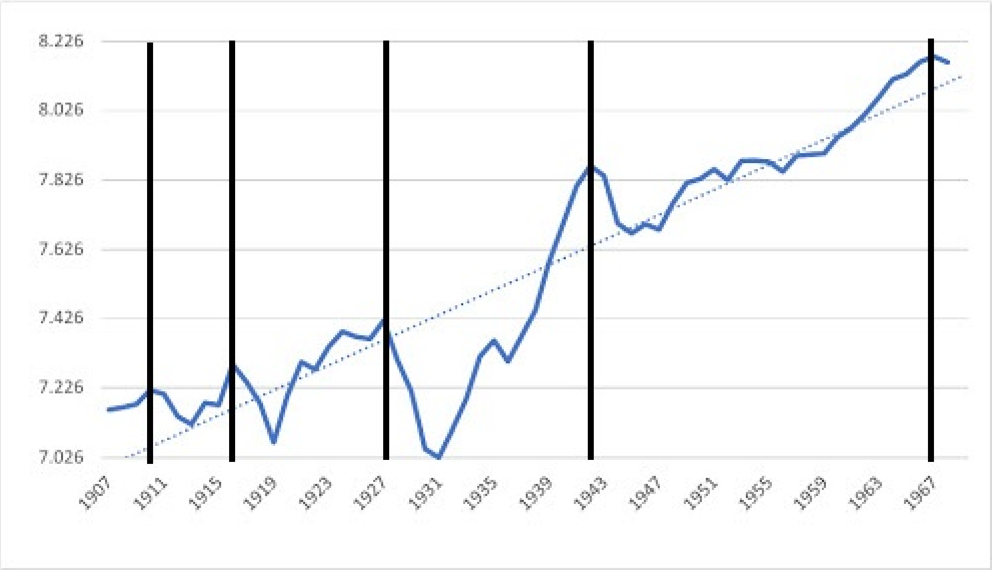


Рис. 140: ВВП США с 1907 по 1967 год

На графике я отменил несколько промежутков, которые очень похожи друг на друга. Каждый такой промежуток называется экономическим циклом, и у каждого цикла есть несколько характерных фаз. Рассмотрим их на примере одной теоретической страны, чья динамика ВВП описана на графике ниже:

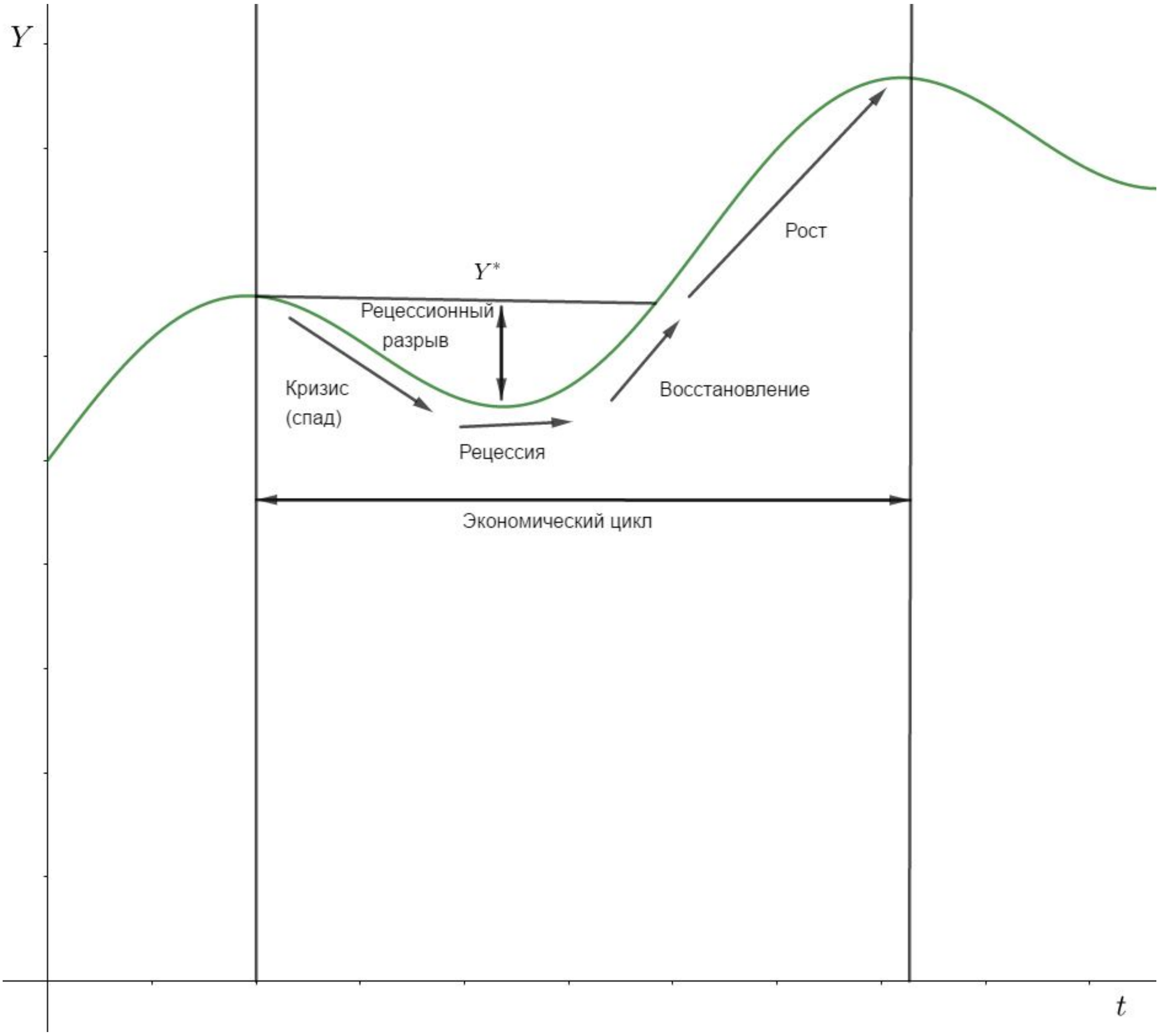


Рис. 141: Фазы экономического цикла.

Как видно из графика, экономический цикл состоит из четырех основных фаз.

Первая фаза называется **спадом**. Любой экономический цикл начинается с кризиса. Кризис могут происходить по разным причинам, но у всех них есть общие характеристики: из-за какого-то крупного негативного события ряд фирм банкротится, люди теряют работу, из-за чего банкротятся новые фирмы, чьи товары остаются невостребованными, и так далее. Также довольно часто оказывается затронута банковская система, что только усугубляет кризис.

После кризиса идет период застоя, или **рецессии**, когда экономика страны и государство еще не могут справиться с негативными последствиями спада.

На протяжении спада и рецессии существует высокая безработица (именно она называется циклической). Однако, все капитальные факторы производства (заводы, оборудование) никуда не исчезают: они просто не используются. Таким образом, возникают два понятия: **Фактического** и **Потенциального** ВВП. **Фактическим** ВВП называется, собственно, ВВП, который наблюдается в настоящий момент времени, а **потенциальным** называется ВВП, который мог бы достигнут в отсутствии экономического спада, при полном использовании имеющегося капитала. Другими словами, **Потенциальный ВВП** – это ВВП при отсутствии циклической безработицы, то есть ВВП при естественном уровне безработицы. Отличие фактического ВВП от потенциального в меньшую сторону называется **Рецессионным разрывом**, который считается в процентах от потенциального уровня.

Во время **восстановления** все еще существует циклическая безработица и рецессионный разрыв. Однако на этой фазе экономика уже приходит в себя: безработица начинает уменьшаться, а неиспользуемый капитал снова возвращается в работу. Заметьте, что потенциальный уровень ВВП во время рецессионного разрыва очень медленно, но снижается из-за ухудшения капитала, который некому амортизировать (поддерживать) во время рецессионного разрыва, так как он не используется.

Завершается экономический цикл фазой **роста**, которая характеризуется увеличением количества капитала и отсутствием рецессионного разрыва. Рост экономики продолжается до следующего крупного кризиса, который приводит к спаду и начинает новый экономический цикл.

Как уже было сказано, рецессионный разрыв в экономике страны во время спада, рецессии и восстановления связан с циклической безработицей. Для описания этой зависимости используется **уравнение Оукена**:

$$\frac{Y^* - Y}{Y^*} = \beta \cdot (u - u^*)$$

Здесь Y – фактический ВВП, Y^* – потенциальный ВВП, β – коэффициент Оукена, u – общий уровень безработицы, u^* – естественный уровень безработицы. Таким образом, $u - u^* = u_c$, где u_c – циклический уровень безработицы, а $\frac{Y^*-Y}{Y^*}$ – величина рецессионного разрыва в долях. Коэффициент Оукена, обозначающий, как сильно рост циклической безработицы сказывается на ВВП страны, может принимать различные значения для разных стран. Например, если экономика страны завязана на большом объеме потребления, то люди, потерявшие работу и, соответственно, лишившиеся возможности покупать товары, снизят ВВП и засчет того, что не производят блага, и засчет того, что не покупают их ($\beta \uparrow$). Или же наоборот, в стране с большим объемом резервов и активной социальной антикризисной политикой (выплата пособий по безработице, поддержка малого бизнеса и т.д.) во время кризиса потребление товаров может остаться неизменным, и тогда рост безработицы не приведет к сильному падению ВВП ниже потенциального ($\beta \downarrow$).

Уравнение ВВП по расходам, связанные с ним тождества, мультипликация ВВП и Фискальная политика государства

В данном разделе мы рассмотрим основные составляющие ВВП страны и то, как на нем может сказаться изменение различных параметров в экономике.

Уравнение ВВП по расходам

Здесь мы будем рассчитывать ВВП по расходам: исходя из того, сколько денег потратили все существующие экономические агенты на территории страны. В нашей модели деньги будут тратить население (C – *consumption*), государство (G – *government expenditures*), инвесторы, как частные (все физические и юридические лица), так и государственные (I – *investments*), а также иностранный сектор (Ex – *export*, Im – *import*). Разница между экспортом и импортом обычно называется **чистым экспортом** и имеет обозначение Xn ($Ex - Im = Xn$). Таким образом, чтобы высчитать ВВП, нам необходимо сложить все внутренние затраты (C, G, I), а также затраты на покупку наших товаров иностранным сектором (Ex). Так как внутри нашей страны также приобретаются импортные блага, которые не должны учитываться в составе нашего ВВП, но которые мы учли в суммарных расходах, то необходимо вычесть импорт (Im). Тогда уравнение ВВП по расходам будет иметь следующий вид:

$$Y = C + I + G + Ex - Im = C + G + I + Xn$$

Основы фискальной политики

Фискальная (налогово-бюджетная) политика - политика государства по регулированию экономики с помощью изменения **государственного бюджета**. Фискальную политику проводит **Правительство** страны, или же конкретные его министерства.

Государственный бюджет - перечень доходов и расходов государства. В самом простом случае принято считать, что доходами государства являются налоги ($Tx - taxes$), а расходами - госзакупки (G) и трансферты (Безусловные выплаты населению и экономике, в том числе пенсии, пособия и т.д. $Tr - transfers$). Разницу между налогами и трансфертами называют **чистыми налогами** с обозначением T ($Tx - Tr = T$).

Существует три варианта исполнения государственного бюджета: дефицит, профицит и баланс.

Дефицитом бюджета называют ситуацию, когда расходы бюджета превышают доходы ($G > T$). В таком случае государству необходимо найти дополнительные средства для реализации госзакупок. Два классических способа для получения дополнительных средств - это уменьшение резервов (на то они и резервы), или заем средств с помощью выпуска облигаций (в России они называются ОФЗ – Облигации Федерального Займа). Если первое приводит к меньшей стабильности страны (снижаются запасы на «черный день»), то второе приводит к увеличению государственного долга. В крайнем случае, правительство может попросить деньги у **Центрального Банка страны**, что является крайне нежелательным действием. Подробнее о взаимодействии правительства и Центрального Банка вы сможете узнать в теме »Монетарная политика».

Профицитом бюджета называют ситуацию, когда доходы бюджета превышают расходы ($T > G$). В таком случае, у госдарства образуются дополнительные средства (государственные сбережения, S_g), которые идут в государственный резерв и используются в различных государственных фондах. Также, эти деньги могут быть направлены на погашение государственного долга.

Бюджет являестя **сбалансированным**, если расходы и доходы государства равны ($T = G$).

Дефицит бюджета обычно наблюдаются в условиях кризиса, когда государство стремиться поддержать экономику и формирует дополнительные госзаказы, а налоги уменьшаются. Профицит же, наоборот, чаще возникает в период роста, когда государство копит «подушку безопасности», а экономика хорошо себя чувствует и без внешнего стимулирования. Таким образом, нельзя сказать, что дефицит и профицит бюджета являются чем-то «плохим» или «хорошим» для экономики страны: это не более, чем естественные явления в ключе проводимой государством политики.

Цели правительства в экономике

Проводя фискальную политику, государство преследует три основные цели (именно на них необходимо ссылаться при решении олимпиадных задач):

1. **Закупка общественных благ**. Одной из самых древних целей государства была покупка товаров и услуг общего пользования, которые люди не способны приобрести по-отдельности. Закупка общественных благ является главной расходной статьей государства.

2. **Регулирование несовершенств рыночной экономики**. Рыночная экономика, помимо ее плюсов в виде эффективого распределения ресурсов и высоких стимулов к научно-техническому прогрессу, имеет ряд минусов. Например, минусами этой экономической системы являются негативные внешние эффекты (**экстерналии**, например, ухудшение экологии), монополизация рынка, подверженность кризисам и т.д. С помощью госзакупок, налогов, трансфертов и предлагаемых законопроектов правительство старается избавиться от всего вышеперечисленного.

3. **Социальная политика**. Одна из задач государства - повышение уровня жизни населения. И если обсепеченные люди имеют довольно высокий уровень жизни, то беднейшие слои населения

нуждаются в поддержке для того, чтобы этого уровня достичь. Таким образом, социальная политика государства сводится к поддержке необеспеченной части населения страны. В основном, социальная политика осуществляется с помощью трансфертов.

Основы платежного баланса и структура сбережений

Платежный баланс - список притока в страну и оттока из страны денежных средств. Важнейшую роль в платежном балансе играют **сбережения** людей, а также чистый экспорт. Рассмотрим, из чего складываются сбережения.

Весь доход, который получают агенты, они по определению тратят либо на потребление, либо на сбережения. Рассмотрим сбережения всех экономических агентов в нашей системе: государства, населения и иностранного сектора.

Доходом государства в нашей модели являются налоги. Потреблением (расходами) государства являются госзакупки и трансферты. Оставшаяся после осуществления всех расходов сумма является государственными сбережениями:

$$S_g = T - G$$

Как вы можете заметить, в случае профицита бюджета сбережения государства положительны, а в случае дефицита - отрицательны.

Так как доход всей страны равен ее ВВП, а доход государства - это налоги, то населению страны остается величина $Y_d = Y - T$ (учитываем, что трансферты также входят в доход людей). На потребление население тратит C, следовательно, частные сбережения можно записать следующей формулой:

$$S_p = Y_d - C = Y - T - C$$

Сумма государственных и частных сбережений называется **национальными сбережениями**: $S_g + S_p = S_n$.

Также мы можем рассчитать сбережения иностранного сектора в национальной валюте: доход иностранного сектора равен импорту в нашу страну, а расходы – это затраты на экспорт из нашей страны. Таким образом, иностранные сбережения:

$$S_f = Im - Ex = -Xn$$

Теперь мы готовы записать тождество платежного баланса:

$$S_n = S_g + S_p = T - G + Y - T - C = Y - G - C = C + I + G + Xn - C - G = I + Xn$$

$$S_n - I = Xn$$

Левая часть уравнения называется **Сальдо счета движения капитала** и показывает приток или отток капитала (инвестиционных вложений) в нашу страну. Правая часть уравнения называется **Сальдо счета текущих операций** и показывает приток или отток денег в торговле товарами и услугами. Например, если сальдо счета движения капитала положительно, то есть национальные сбережения больше внутренних инвестиций, то страна является кредитором на международном рынке, то есть инвестирует деньги в другие страны. Тогда другие страны могут на эти деньги импортировать больше наших товаров, что приводит к положительному сальдо счета текущих операций (растет наш экспорт).

Также тождество платежного баланса можно переписать в следующем виде:

$$S_n - I = Xn = -S_f$$

$$I = S_n + S_f$$

Таким образом, вся наша валюта, которую сберегают отечественные и зарубежные агенты, инвестируется внутри нашей страны.

Мультипликация ВВП

Изменение всех составляющих ВВП по расходам приведет к изменению этого самого ВВП. Однако, само изменение ВВП может привести к изменению некоторых величин, из-за чего начинается бесконечный цикл изменений. Далее мы рассмотрим этот процесс на нескольких примерах.

Величина, которая не зависит от других переменных внутри модели, называется в экономике **автономной** или **экзогенной**. Величина же, которая зависит от внутренних переменных, является **неавтономной** или **эндогенной**. Если не сказано иного, в задачах мы предполагаем, что все величины являются автономными. Однако, здесь мы рассмотрим, что происходит в экономике, если какая-то величина становится неавтономной, а в особенности то, как это влияет на фискальную политику (госзакупки и чистые налоги).

Важно понимать, что мультипликация ВВП - краткосрочное явление, то есть она протекает очень быстро относительно других макроэкономических процессов.

Неавтономное потребление

Самый классический случай, использующийся в олимпиадной экономике. От чего же может зависеть потребление?

В нашей модели потребление будет зависеть от дохода людей и выражаться следующей формулой:

$$C = C_a + mpc(Y - T) = C_a + mpc \cdot Y_d$$

Здесь C_a – автономное потребление (та сумма денег, которую экономика потратит независимо ни от чего), mpc ($Marginal\ Prospencity\ to\ Consume$) – предельная склонность к потреблению, то есть **доля от дохода людей, которую они тратят на потребление**, Y_d – располагаемый доход.

Подставим наше потребление в формулу ВВП и выразим оттуда Y, так как он теперь окажется и слева, и справа:

$$Y = C + I + G + Xn = C_a + mpc \cdot (Y - T) + I + G + Xn$$

$$Y = C_a + mpc \cdot Y - mpc \cdot T + I + G + Xn$$

$$Y \cdot (1 - mpc) = C_a + I + G + Xn - mpc \cdot T$$

$$Y = \frac{1}{1 - mpc} \cdot (C_a + I + G + Xn) - \frac{mpc}{1 - mpc} \cdot T$$

Таким образом, мы получили два мультипликатора. Первый ($\frac{1}{1-mpc}$) – это мультипликатор автономного потребления, инвестиций, госзакупок и чистого экспорта. Второй ($-\frac{mpc}{1-mpc}$) – мультипликатор налогов.

Так как $0 < mpc < 1$, то мультипликатор госзакупок оказывается всегда больше единицы. То есть, если увеличить госзакупки на X, то ВВП вырастет на величину, большую, чем X. Например, если $mpc = 0.9$ (то есть люди тратят на потребление 90% своих доходов), то мультипликатор госзакупок будет равен 10, а налогов – (-9). То есть, увеличив госзакупки на 1, государство может увеличить ВВП на 10. Если же увеличить налоги на 1, то ВВП уменьшится на 9.

Этот эффект достигается с помощью мультипликации через потребление: увеличивая госзакупки, государство поднимает не только ВВП, но и располагаемый доход населения. Из-за увеличения доходов население увеличивает потребление, что опять приводит к увеличению ВВП и располагаемого дохода, из-за чего снова вырастает потребление и так далее.

Неавтономные налоги

Налоги тоже не обязаны быть автономными. Самый распространенный вид неавтономности – это подоходные налоги, при которых государство забирает процент от дохода населения по ставке $0 < t < 1$. Так как доход страны - это ее ВВП, то неавтономные налоги в таком случае можно записать как $T = t \cdot Y$.

Так как налоги появляются в формуле ВВП только при неавтономном потреблении, то добавим неавтономность налогов в предыдущю модель:

$$C = C_a + mpc \cdot (Y - T) = C_a + mpc \cdot (Y - tY) = C_a + mpc(1-t) \cdot Y$$

$$Y = C_a + mpc(1-t) \cdot Y + G + I + Xn$$

$$Y \cdot (1 - mpc(1-t)) = C_a + G + I + Xn$$

$$Y = \frac{1}{1 - mpc(1-t)} \cdot (C_a + G + I + Xn)$$

Таким образом, у нас получился мультипликатор госзакупок и всего остального при неавтономности и налогов, и потребления. Заметьте, что теперь мультипликатор налогов отсутствует, так как они неавтономны. Также, мультипликатор госзакупок при неавтономных налогах оказался меньше, чем при автономных, ведь если государство забирает долю от дохода людей, они будут тратить на потребление меньшую сумму получаемого дохода.

Неавтономные инвестиции

Для того, чтобы рассмотреть неавтономность инвестиций, нам необходимо понимание функции спроса на деньги (спроса на ликвидность, деньги, которые можно быстро потратить). Спрос на деньги в экономике - реальная величина, которая выражается в реальном количестве денег и обозначается как $\frac{M}{P}$, где M - денежная масса, а P - уровень цен. Конкретнее спрос на деньги мы будем обсуждать в следующих главах. Сейчас же нам нужно знать, что спрос на деньги положительно зависит от ВВП страны (чем больше товаров - тем больше денег нужно, чтобы их покупать), и отрицательно - от ставки процента в экономике r, так как чем выше банковская ставка, тем выгоднее класть ликвидность на депозиты и менее выгодно брать кредиты на свои расходы. В общем виде, фукнцию спроса на деньги можно описать следующей формулой:

$$\frac{M}{P} = \alpha Y - \beta r$$

Здесть α и β – положительные параметры.

Теперь приступим к неавтономности инвестиций. Инвестиции внутри страны зависят от ставки процента в этой стране, так как инвесторы рассматривают вариант вложения денег в банк или долговые бумаги как альтернативу инвестициям. Чем выше ставка, тем выгоднее эта альтернатива, и инвесторы будут уменьшать размер инвестиций, увеличивая объем вложения в финансовую сферу. Таким образом, неавтономность инвестиций можно выразить следующей формулой:

$$I = I_a - \gamma r$$

Здесь γ – положительный параметр, а I_a – автономные инвестиции.

Выразим r из спроса на ликвидность и подставим его в уравнение инвестиций:

$$\frac{M}{P} = \alpha Y - \beta r$$

$$r = \frac{\alpha Y - \frac{M}{P}}{\beta}$$

$$I = I_a - \gamma r = I_a - \gamma\frac{\alpha Y - \frac{M}{P}}{\beta} = I_a - \frac{\gamma\alpha}{\beta}Y + \frac{\gamma}{\beta}\frac{M}{P}$$

Теперь, подставив это в функцию ВВП, можем получить мультипликатор госзакупок и всего остального при неавтономных инвестициях:

$$Y = C + I + G + Xn = C + I_a - \frac{\gamma\alpha}{\beta}Y + \frac{\gamma}{\beta}\frac{M}{P} + G + Xn$$

$$Y + \frac{\gamma\alpha}{\beta}Y = C + I_a + \frac{\gamma}{\beta}\frac{M}{P} + G + Xn$$

$$Y \cdot \frac{\beta + \gamma\alpha}{\beta} = C + I_a + \frac{\gamma}{\beta}\frac{M}{P} + G + Xn$$

$$Y = \frac{\beta}{\beta + \gamma\alpha}(C + I_a + \frac{\gamma}{\beta}\frac{M}{P} + G + Xn)$$

Как вы можете заметить, получившийся мультипликатор ($\frac{\beta}{\beta+\gamma\alpha}$) меньше единицы. Это значит, что увеличение госзакупок на единицу в модели неавтономных инвестиций приведет к увеличению ВВП меньше, чем на единицу. Этот эффект также называют **эффектом вытеснения**. В нашем случае дополнительные госзакупки будут «вытеснять» инвестиции из страны. Рассмотрим более детально, как происходит мультипликация:

Увеличение госзакупок приводит к увеличению ВВП. Так как объем денежной массы и уровень цен в краткосрочном периоде оказываются постоянными, то, чтобы уравновесить выросший спрос на деньги, банки поднимают ставку процента (можете еще раз посмотреть на уравнения спроса на деньги). Из-за повышения ставки падает объем инвестиций, что приводит к снижению ВВП.

Безусловно, можно придумать еще множество вариантов неавтономностей и соответствующих им мультипликаторов. Например, инвестиции могут положительно зависеть от ВВП, так как фирмы будут тратить часть своих доходов как внутренний источник инвестирования, или импорт может также положительно зависеть от ВВП, так как увеличения национального дохода приводит к повышению спроса на зарубежные товары и услуги. Также, неавтономности различных величин могут комбинироваться. Мы с вами рассмотрели основные виды неавтономностей, которые используются в количественных и качественных задачах. Если встретится что-то необычное, то процесс мультипликации будет явно прописан в задаче.

Монетарная политика

В данном разделе мы с вами поговорим о деньгах и о том, как с помощью них можно управлять экономикой.

Краткая история денег и монетарной политики

Первые деньги появлялись независимо друг от друга у разных культур в качестве универсального средства обмена. Таким образом, экономика от **бартера** (обмена товара на товар) перешла к более эффективному обмену товара на деньги. Первые деньги имели реальную стоимость сами по себе (шкуры, золото и т.д.), из-за чего люди охотно обменивали свои товары на деньги и обратно, и из-за чего деньги постоянно оставались стабильными в качеств обмена и накопления.

Однако, из-за высокого темпа экономического роста начинала складываться ситуация, в которой денег стало значительно меньше, чем товаров, из-за чего процессы обмена замедлялись, и за нехваткой денег экономика снова начала перетекать в бартер, то есть менее эффективное состояние. За решение проблемы взялись правительства стран, задачей которых стало увеличение количества денег без потери их покупательной способности. Так как драгоценных металлов и других универсально ценных материалов становилось все меньше и меньше, решение было найдено в валютных **стнадартах**. Чтобы увеличить количество денег, государство начало изготваливать их из материалов, которые не имели высокой ценности (ценность материалов была меньше номинальной стоимости монет). Логично было, что такие деньги вызывали недоверие со стороны населения, так что, чтобы сохранить их платежеспособность, государство ввело **стандарт обмена** валюты на материалы, имеющие реальную стоимость. Стандарты бывали и серебрянные, и медные, но самое большое распространение получил **золотой стандарт**, при котором любой человек всегда мог обменять у государства свои деньги на определенное количество золота. В результате, количество валюты выросло и начало покрывать все потребности обмена, причем своя валюта осталась стабильной в глазах населения.

Система золотого стандарта продержалась довольно долго, но привела к очередным проблемам по мере роста мирового производства и научно-технического прогресса, а также развития финансовых институтов. Сильный рывок вперед в XIX веке во всех областях экономики привел к первым финансовым нестабильностям и кризисам перепроизводства, которые начали активно замедлять экономический рост и уровень жизни населения. Правительства стран не справлялись с контролем экономики и поддержкой населения, большой проблемой стала **Великая депрессия** – крупнейший кризис 1920-х годов, на пике которого безработица преодолевала отметку в 25%, а банковская система оказалась на грани полного уничтожения. После Второй Мировой Войны ситуация повторилась: экономический кризис в разрушенной Европе требовал срочных мер государственного регулирования.

В результате появилась необходимость в новом регулирующем государственном органе, который бы стабилизировал экономику. Все фискальные институты по взаимодействию с населением и экономикой (госзаказы, трансферты) уже применялись и были исчерпаны. Примерно во второй четверти XX века экономистами была сформулирована идея об управлении экономикой с помощью денежной массы, однако, для этого необходимо иметь возможность менять эту самую денежную массу, с чем возникли некоторые трудности: при увеличении количества денег пришлось бы увеличивать количество золотых запасов, которые обеспечивают золотой стандарт, иначе бы надежность денег уменьшилась, что могло бы привести к панике и провалу всей денежной системы. Таким образом, требовалась срочная отвязка денег от золота, то есть отказ от золотого стандарта ради возможности проведения **монетарной политики** - политики стабилизации экономики через управление денежной массой.

Главный вопрос заключался в том, как отвязать деньги от золота, не потеряв доверия населения к валюте. Ответ оказался хоть и неочевидным, но довольно простым: делать ничего не нужно. Отмена золотого стандарта прошла очень гладко и без каких-либо сильных шоков. почему же так произошло? В реальности, несмотря на золотой стандарт, никто уже не пользовался своей возможностью обменять деньги на золото. В конце эпохи золотого стандарта люди ценили деньги не потому, что их можно обменять на золото, а потому, что на них можно было что-либо купить, и это их свойство осталось после отмены стандарта. По сути, золотой стадарт утратил смысл задолго до его отмены.

Таким образом, денежная система стала **фидуциарной**: деньги являются абсолютно номинальной величиной, не подкрепленной никакой привязкой к реальной ценности, и платежеспособность которых держится на вере людей в эту их платежеспособность. Фидуциарная система - это современная денежная система, при которой возможно проведение монетарной политики.

Основы и инструменты монетарной политики

Монетарную политику осуществляет Центральный Банк страны - регулирующий орган, не подчиняющийся ни одному другому правительственному формированию. Основной целью ЦБ является стабилизация экономики страны, для чего ЦБ отведены многие инструменты государственного контроля в финансовом секторе. По факту, ЦБ в разные периоды времени проводит политику, в соответствии с двумя вариантами стабилизации экономики.

Первая политика – это предотвращение кризизов и стабилизация экономики во время кризиса – так называемая **антикризисная политика**. Вторая политика – это обеспечение стабильного роста экономики и поддержание высокого уровня ее эффетивности при отсутствии кризиса. Зачастую меры, которые предпринимает ЦБ при проведении этих двух политик могут противоречить друг другу. Такая ситуация получила название **«динамическая несостоятельность Центробанка»**. Проблему динамической несостоятельности ЦБ мы обсудим в дальнейших разделах, когда будем рассматривать его антикризисную политику. Сейчас же мы сосредоточимся на долгосрочной цели: стабилизации экономики на долгое время в условиях экономического роста.

ЦБ не может влиять ни на один макроэкономический показатель напрямую, а делает это путем косвенного влияния. Все инструменты монетарной политики направленны на изменение количества денег в обороте (денежной массы), а далее уже денежная масса влияет на остальные показатели, которые важны для ЦБ. Рассмотрим три основных инструмента монетарной политики, и один дополнительный, но очень важный:

Торговля на рынке ОЦБ

Облигации Центрального Банка (ОЦБ) или Государственные Краткосрочные Облигации (ГКО) – Облигации, выпускаемые ЦБ в целях контроля денежного рынка (В России – ОБР, Облигации Банка России). В отличии от всех остальных облигаций, целью выпуска которых является привлечение денежных средств, ОЦБ не ставят себе такой цели и служат только для проведения монетарной политики.

Механизм изменения денежной массы заключается в следующем: при выпуске новых облигаций на рынок, ЦБ меняет их на деньги, изымая таким образом деньги из оборота. Если же нужно наоборот увеличить денежную массу, то ЦБ может выкупить свои же облигации на бирже, где данные облигации свободно торгуются, таким образом увеличив количество денег в экономике (так как выкупает он их за, собственно, деньги).

Ставка рефинансирования

Ставка рефинансирования (Она же - ключевая ставка ЦБ) – процентная номинальная ставка, по которой коммерческие банки могут брать кредиты у ЦБ. Уровень процентной ставки определяется на специальных заседаниях ЦБ (В России – раз в 6 недель) исходя из текущей макроэкономической ситуации в стране.

Механизм изменения денежной массы: при понижении ставки рефинансирования стоимость кредитов для коммерческих банков снижается. В свою очередь те за счет банковской конкуренции начинают снижать ставки по кредитованию населения и экономики для привличения клиентов (можно сказать, что предложение кредитов увеличивается, так как стоимость кредитов для банка снижается). Кредиты становятся доступнее, в результате чего их количество увеличивается, следовательно, коммерческие банки берут больше денег у ЦБ, что увеличивает суммарное количество денег в обороте (денежная масса растет). Аналогично, повышение ставки рефинансирования приведет к уменьшению денежной массы.

Норма обязательных резервов

Норма обязательных резервов (НОР, rr) – доля от всех депозитов, которую устанавливает ЦБ и которую коммерческие банки обязаны держать в резерве (в виде наличности или в виде депозита в ЦБ). Изначально НОР была введена для стабилизации банковской системы, чтобы банки всегда могли расплатиться по своим депозитным обязательствам и не банкротились (ведь иначе банки могут пустить слишком много денег в кредит, и когда придут клиенты, желающие забрать свой депозит, банк не сможет выдать его из-за отсутствия резервов, что приведет к его банкротству или закрытия по причине ненадежности). Однако, НОР может использоваться как инструмент монетарной политики.

Механизм изменения денежной массы: при снижении НОР банки смогут увеличить свое предложение денег, так как теперь им можно держать меньшую долю из депозитов (освободившиеся деньги они смогут пустить в кредит). Таким образом, количество кредитов увеличивается, что приводит к увеличению денежной массы в экономике. Ананлогично, повышение нормы обязательных резервов приведет к снижению денежной массы.

Вербальные интервенции

Вербальные интервенции – Объявления ЦБ, которые он делает на заседаниях или выпускает как официальные заявления или статистические данные. Эффективность вербальных интервенций зависит от степени доверия экономики и населения к ЦБ. Вербальные интервенции – неклассический инструмент ЦБ, который воздействует на целевые макроэкономические показатели без участия денежной массы на основе **самосбывающихся прогнозов**.

Например, если ЦБ объявит о том, что ставка по депозитам вскоре вырастет и ему поверят, то люди повременят с открытием депозитов, чтобы дождаться более высоких ставок. Тогда банки, видя падение спроса на депозиты, увеличат ставки для того, чтобы стимулировать вложения. План удался.

Или же, например, ЦБ объявит о том, что уровень инфляции в ближайшее время вырастет. Тогда люди, ожидая падение покупательной спообсности денег, не будут их сберегать, а попытаются вложить их в товары, то есть произойдет резкий рост совокупного спроса. Фирмы, увидев рост спроса на свои товары, начнут быстрее увеличивать цены, по сути, увеличивая инфляцию. План снова удался.

Основные варианты исполнения долгосрочной монетарной политики

Так как стабилизировать целую экономику по щелчку попросту невозможно, основная идея монетарной политики - стабилизация одного важного макроэкономического фактора, который повлияет на общее состояние экономики (так называемые **политики таргетирования** - выбора определенного уровня целевого фактора и поддержания этого уровня с помощью имеющихся инструментов). Мы с вами разберем основные три варианта исполнения монетарной политики во внекризисное время.

Политика таргетирования процентной ставки (доходности) в экономике

Политика таргетирования процентной ставки является одной из первых идей монетарной политики. Определив ее необходимый уровень и контролируя с помощью изменения предложения денег, ЦБ добивается гарантированной доходности депозитов и других активов в экономике, из-за чего финансовые колебания практически прекращаются.

Контроль над ставкой процента осуществляется засчет **политики коридора**: ЦБ определяет диапазон значений ставки процента (например, от 10% до 12% годовых), а затем поддерживает его. Если ставка идет вверх, ЦБ увеличивает количество денег в экономике и у банков. В результате, рынок оказывается насыщен деньгами и экономике требуется меньше денег, которые она обычно берет в кредит у банковской системы, у которой теперь также много денег (одновременно падает и спрос на деньги, и растет предложение денег). В результате, банки вынуждены снизить свои ставки обратно, чтобы избавиться от избытка денег и стимулировать экономику снова брать у них кредиты. Ананлогично, при снижении ставки процента ниже коридорного значения, ЦБ уменьшит денежную массу, что приведет к увеличению ставки.

Проблема данного подхода заключается в том, что при колебании этапов бурного развития и застоя экономике нужно либо много денег, либо мало, то есть ставка процета так и норовит постоянно выбиться из коридорных значений. Более того, с развитием международного финансового сектора, при стабильной ставке в одной стране и нестабильных в другой постоянно возникают возможности **экономического арбитража** между странами (значение данного термина и его последствия можете посмотреть в теме **Финансы**). Все это приводит к тому, что ЦБ вынужден очень резко менять массу то в одну, то в другую сторону, из-за чего происходят очень сильные колебания цен в экономике, а то и вовсе может начаться **дефицит денег**.

Получается, что политика таргетирования процентной ставки приводит к сильной дестабилизации экономики, то есть к противопожному результату. Данная политика была одной из первых предложенных политик стабилизации и в настоящий момент не используется.

Политика таргетирования валютного курса

Политика таргетирования валютного курса была распространена во многих странах в конце XX века. Идея стабилизации валютного курса заключается в том, что при фиксированном курсе обмена валют стабилизируется международная торговля (так как доходы с экспорта и импорта больше не колеблются при продаже товара за иностранную валюту), что приводит к улучшению конкуренции, стабилизации цен и умеренной инфляции.

Контроль валютного курса также осуществляется **политикой коридора**: ЦБ фиксирует необходимый курс обмена и старается его придерживаться. Если курс отечественной валюты падает, ЦБ продает свои валютные резервы (или занимает иностранную валюту через валютные облигации), что приводит к увеличению предложения иностранной валюты, и, следовательно, снижению ее стоимости, что возвращает курс отечественной валюты. Если же курс отчественной валюты оказывается слишком высоким, то ЦБ закупает иностранную валюту, что увеличивает ее стоимость и, соответственно, снижает стоимость отечественной валюты, возвращая ее в коридор.

Данная политика также имеет изъян, который в конце XX века привел к финансовому коллапсу в нескольких странах (а Россия вообще объявила единственный в истории дефолт. В случае нестабильности экономики страны, которая придерживается политики таргетирования валютного курса, спрос на валюту этой страны будет всегда низким, а значит ее курс всегда будет падать, «выбиваясь» из установленного валютного коридора. В таком случае ЦБ необходимо постоянно продавать иностранную валюту, чтобы снижать ее стоимость. В результате, у ЦБ этой страны сначала закончатся валютные резервы, а затем сильно возрастет госдолг по валютным облигациям, что в итоге приведет либо к огромной инфляции (если ЦБ попробует погасить облигации с помощью эмиссии денег), но в таком случае, чтобы погасить облигации, придется покупать иностранную валюту обратно, что обрушит фиксированный валютный курс. Второй вариант - это дефолт (отказ от выплаты облигаций), в результате которого спрос на отечественную валюту так сильно обрушится, что поддерживать фиксированный валютный курс станет также невозможно.

Оказывается, политика таргетирования валютного курса действительно может стабилизировать экономику в краткосрочном периоде, но имеет риск перейти в ситуацию сильнейшего кризиса, из-за чего большинство стран в настоящий момент отказались от данной политики.

Политика таргетирования инфляции

Инфляция – процесс роста уровня цен в экономике, или, другими словами, падения покупательной способности денег. Инфляция – очень важный для экономики процесс, так как при наличии инфляции деньги, которые люди сберегают, постепенно обесцениваются, что стимулирует людей тратить деньги и покупать товары и услуги, что очень положительно сказывается на состоянии экономики. Идея выбрать оптимальный уровень инфляции и добиваться его имеет под собой вполне логическое объяснение. Разберем две ситуации, который оказывают негативное влияние на экономику страны:

1. Слишком низкий уровень инфляции приводит к тому, что люди, зная, что деньги не обесценятся, перестают покупать товары, что может привести к стагнации или даже кризису перепроиз-

водства. Также фирмы, взявшие кредиты и рассчитывая на продажу по более высокой цене, могут не отбить проценты по этим кредитам и обанкротиться. Более того, ситуация может перерасти в **дефляционную спираль**: люди начинают тратить меньше денег, больше их сберегая. Фирмы, видя падение спроса, снижают цены для стимулирования покупок. Население, увидев, что цены начали падать, покупают товары еще меньше, в надежде, что потом смогут купить товар по еще более выгодной цене, и так далее. Таким образом, продажи товаров сильно падают, что почти гарантировано приведет к кризису перепроизводства.

2. Слишком высокий уровень инфляции также опасен для экономики в основном засчет того, что он может привести к **инфляционной спирали**: ситуации, в которой люди начинают тратить все свои деньги на покупки (так как сберегать деньги при высокой инфляции не выгодно), а фирмы, видя увеличение спроса, повышают цены все сильнее и сильнее. Инфляционная спираль – не просто теоретическая модель, а имело место быть в новейшей истории. В каждом случае, возникновение инфляционной спираль приводило к полному краху банковской системы (с банками в таком случае население перестает взаимодействовать), а далее к полному краху денежной системы, отказу от денег (так они обесцениваются настолько, что уже совсем ничего не стоят), и к глубочайшему экономическому кризису.

Получается, что и слишком низкий, и слишком высокий уровень инфляции опасны для экономики. Таким образом, при стабилизации уровня инфляции на каком-то «среднем» уровне можно добиться отсутствия рисков дефляционных и инляционных кризисов (спиралей), а также обеспечить стабильность реальных сбережений, из-за чего банковская система окажется в очень устойчивом положении, что приведет к стабилизации остальных сфер экономики страны.

Механизм стабилизации инфляции довольно прост: ЦБ выбирает таргетируемый (желаемый) уровень инфляции (в России это 4%). Далее, если инфляция больше таргетируемого уровня, ЦБ уменьшает денежную массу, что снижает совокупный спрос и приводит к замедлению роста цен. Если же инфляция оказывается ниже таргетируемого уровня, ЦБ увеличивает денежную массу, что приводит к росту совокупного спроса и ускорению роста цен.

Политика таргетирования инфляции - основная политика Центробанков всех стран в настоящий момент времени. Установление стабильной инфляции действительно оказывает стабилизирующее действие на экономику страны и на настоящий момент времени нет случаев ухудшения экономики или приведения ее к кризису при использовании политики таргетирования инфляции.

Мультипликация денежной массы

Денежная масса (M) – общее количество денег в экономике, находящееся у всех экономических агентов. Однако, денежная масса не совпадает с общим количеством денег, выпущенных ЦБ. Общее количество денег, выпущенное ЦБ любым способом, называется **денежной базой** (B). Разберем два этих понятия и то, как они соотносятся друг с другом.

ЦБ выпускает деньги в виде наличности или же в виде электронных денег на счета банков или для торговли на бирже. Выпущенные ЦБ деньги имеются на руках у экономических агентов (C – $Currency$), а также у банков в виде резервов (R – $Reserves$). Денежная масса же состоит из тех же самых денег на руках (C), а также из всех депозитов, которые они держат в банках (D – $Deposites$). И, так как банки не обеспечивают все свои депозиты резервами, а стараются выдать полученные деньги в кредит, будет верно, что $D > R$, то есть $M > B$.

Денежный мультипликатор

Разберем несколько необходимых нам величин:

$\frac{C}{D} = cr$ – норма депонирования. Также она показывает величину замедления денежной массы, ведь чем меньше люди кладут денег в банк, тем меньше процесс кредитования. $\frac{R}{D} = rr + er$ – норма обязательных (rr) и избыточных (er) резервов, в сумме просто норма резервов.

Теперь мы можем записать уравнение мультипликатора, который показывает, во сколько раз денежная масса больше денежной базы:

$$\frac{M}{B} = \frac{C+D}{C+R} = \frac{\frac{C}{D}+\frac{D}{D}}{\frac{C}{D}+\frac{R}{D}} = \frac{cr+1}{cr+rr+er}$$

Данный мультипликтор важен для ЦБ для определения того, сколько именно денег нужно выпустить исходя из объема денежной массы, которого нужно добиться.

Модель IS-LM

Модель IS-LM (Инвестиции, Сбережения, Ликвидность, Деньги) служит для нахождения равновесия в экономике, зависящего от ставки процента в экономике. В этой главе мы будем разбирать зависимость от реальной процентной ставки (r). Также, модель IS-LM помогает понять вид совокупного спроса в экономике, который пригодится нам в другой модели AD-AS.

Равновесие IS

Равновесие инвестиций (I) и сбережений (S) мы выводили, когда обсуждали платежный баланс. Оттуда же мы помним, что это равновесие возникает из основного уравнения ВВП по расходам: $Y = C + I + G + Xn$. Классически, модель IS-LM рассматривает закрытую экономику ($Xn = 0$), однако, если мы его оставим в нашем уранении, ничего плохого не случится.

Так как модель рассматривает зависимость от ставки процента (r), то мы как раз можем использовать зависимость, полученную в теме «Мультипликация ВВП» при неавтономных инвестициях (помните, что инвестиции отрицательно зависят от ставки процента, потому что дорогие кредиты снижают стимулы инвестировать в реальную экономику?):

$$I = I_a - \gamma r$$

Также, сбережения являются доходом страны за вычетом затрат страны:

$$S = Y - C - G - Xn$$

Теперь можем изобразить равенство инвестиций и сбережений на графике:

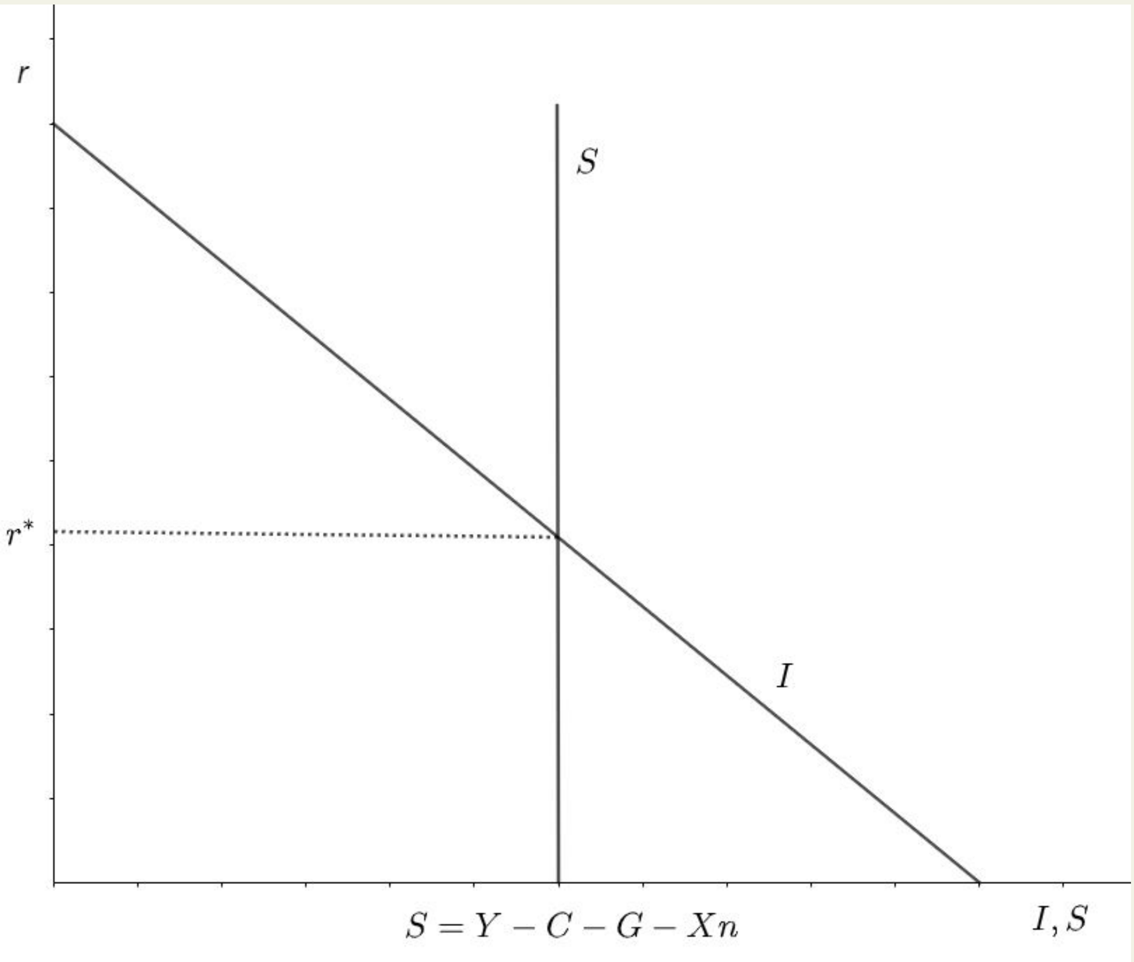


Рис. 142: Товарный рынок (IS)

Найдем равновесие аналитически, используя формулы инвестиций и сбережений:

$$S = I$$

$$Y - C - G - Xn = I$$

$$Y = C + I + G + Xn = C + G + Xn + I_a - \gamma r$$

Это уравнение описывает равновесия на товарном рынке и называется уравнением IS.

Равновесие LM

Равновесие на рынке ликвидности (L) денег (M) мы также обсуждали в теме «Мультипликация ВВП». Реальный спрос на деньги (показывающий, сколько товаров мы хотим покупать), обозначается как $\frac{M_d}{P}$, где M_d – величина спроса на деньги, а P – уровень цен. Реальный спрос на деньги положительно зависит от ВВП страны (чем больше товаров - тем больше денег нужно, чтобы их покупать), и отрицательно - от ставки процента в экономике r, так как чем выше банковская ставка, тем выгоднее класть ликвидность на депозиты и менее выгодно брать кредиты на свои расходы. В общем виде, фукнцию спроса на деньги можно описать следующей формулой:

$$\frac{M}{P} = \alpha Y - \beta r$$

Здесть α и β – положительные параметры.

Предложение денег оказывает ЦБ страны вместе с коммерческими банками. По своему усмотрению, ЦБ может менять и объем денежной базы, и величину денежного мультипликатора. То есть, ЦБ страны полностью контролирует объем денежной массы, а, значит, предложение денег не зависит от других переменных и определяется ЦБ как константа M_s (денежная масса).

Можем нарисовать, как выглядят спрос и предложение денег на графике:

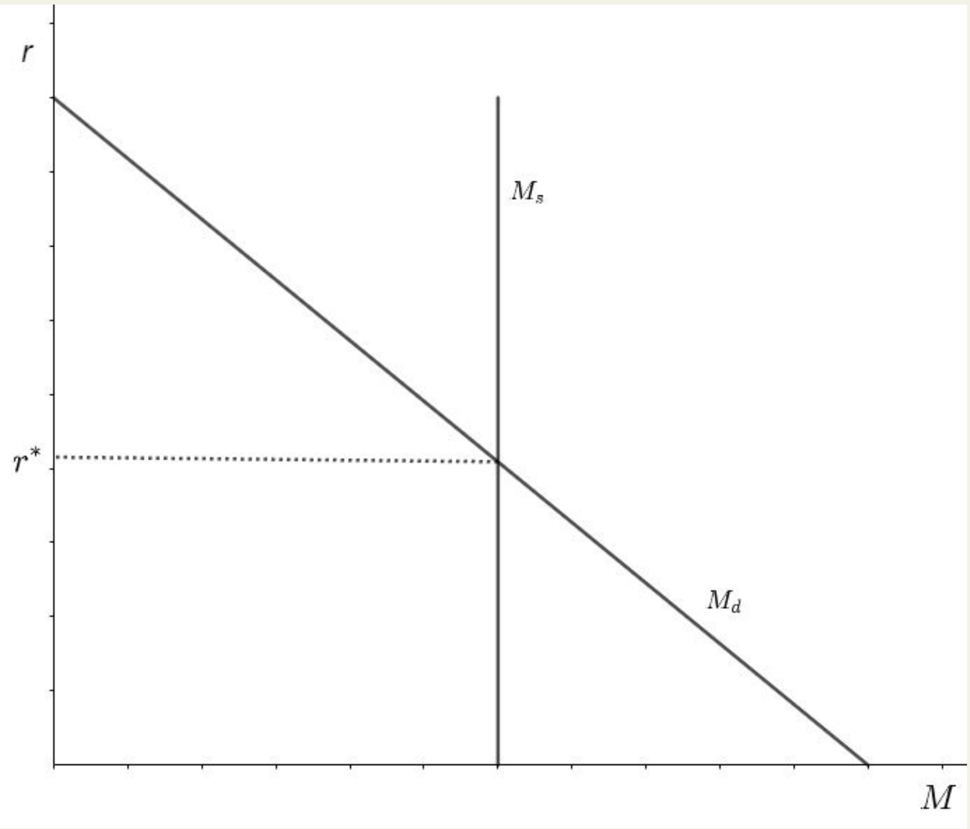


Рис. 143: Рынок денег (LM)

Таким образом, полное равновесие на рынке денег выводится просто из функции спроса, так как предложение – константа:

$$\frac{M}{P} = \alpha Y - \beta r$$

$$Y = \frac{\frac{M}{P} + \beta r}{\alpha}$$

Это уравнение называется уравнением LM.

Общее равновесие IS-LM

Общее равновесие достигается засчет глобального ранвовесия и на рынке товаров, и на рынке денег. Изобразим кривые IS и LM на общем графике с осями $Y - r$:

$$IS = Y = C + G + Xn + I_a - \gamma r$$

$$LM = Y = \frac{\frac{M}{P} + \beta r}{\alpha}$$

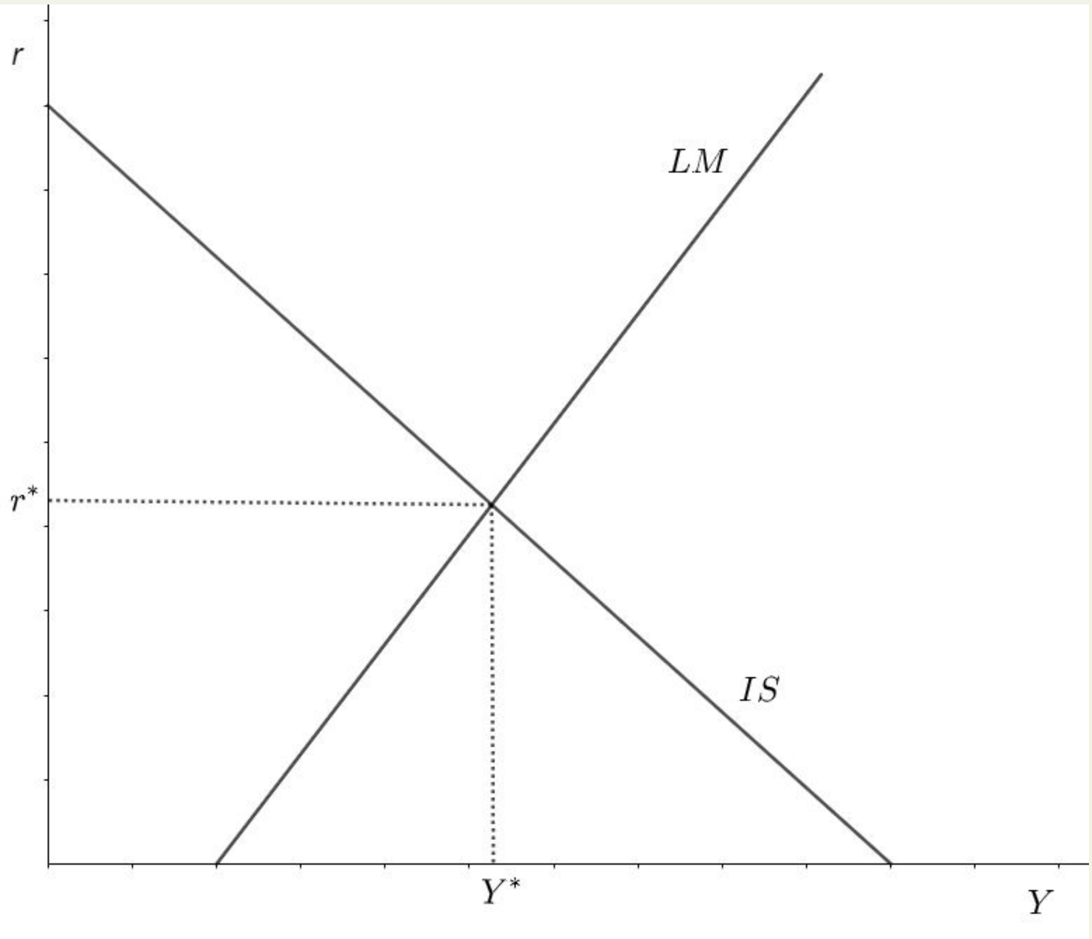


Рис. 144: Общее равновесие IS-LM

Найдем равновесные значения ставки и ВВП:

$$\begin{cases} Y = C + G + Xn + I_a - \gamma r \\ Y = \frac{\frac{M}{P} + \beta r}{\alpha} \end{cases}$$

$$r^* = \frac{\alpha(C + G + X_n + I_a) - \frac{M}{P}}{\alpha\gamma + \beta}$$

$$Y^* = \frac{\beta(C + G + X_n + I_a) + \gamma\frac{M}{P}}{\alpha\gamma + \beta}$$

Последнее уравнение ВВП (Y) является равновесием на общем рынке и показывает, как различные фискальные и монетарные величины влияют на равновесный уровень ВВП. Также, это уравнение называется **уравнением совокупного спроса** в экономике страны и обозначается как **AD** (*Aggregated Demand*).

Шоки в модели IS-LM

Основное применение модели IS-LM – это анализ того, как различные шоки (неожиданные изменения) повлияют на равновесный уровень ВВП и ставку процента. Рассмотрим один из шоков: например, увеличение автономных инвестиций из-за улучшения политической ситуации в стране.

Так как инвестиции задействованы только в реальном (товарном) секторе (IS), то это приведет к росту инвестциионного спроса, что увеличит ставку при каждом заданном уровне ВВП:

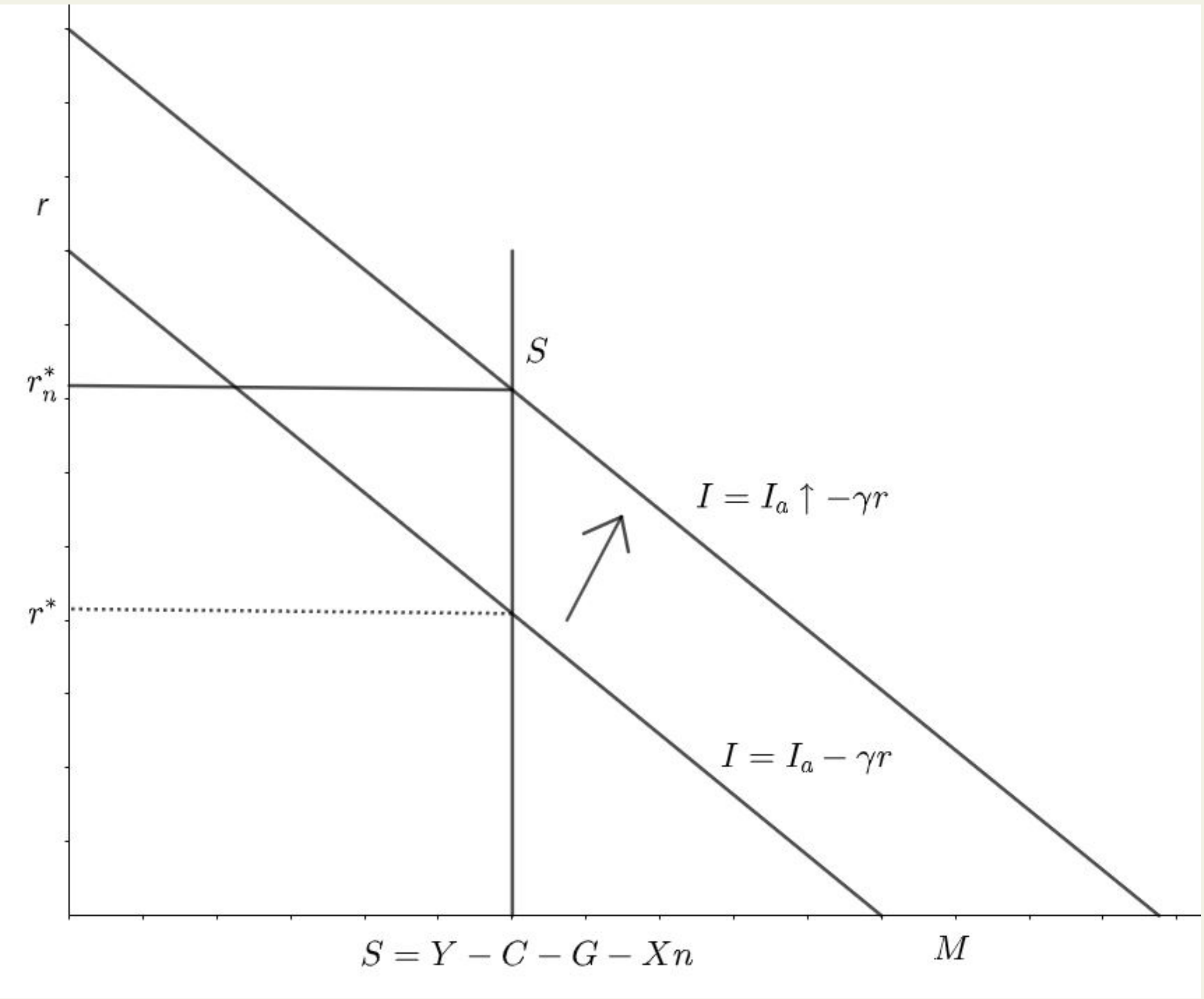


Рис. 145: Сдвиг на товарном рынке

При этом меняется уравнение IS из-за выросших автономных инвестиций:

$$IS = Y = C + G + Xn + I_a \uparrow - \gamma r$$

И меняется общее равновесие:

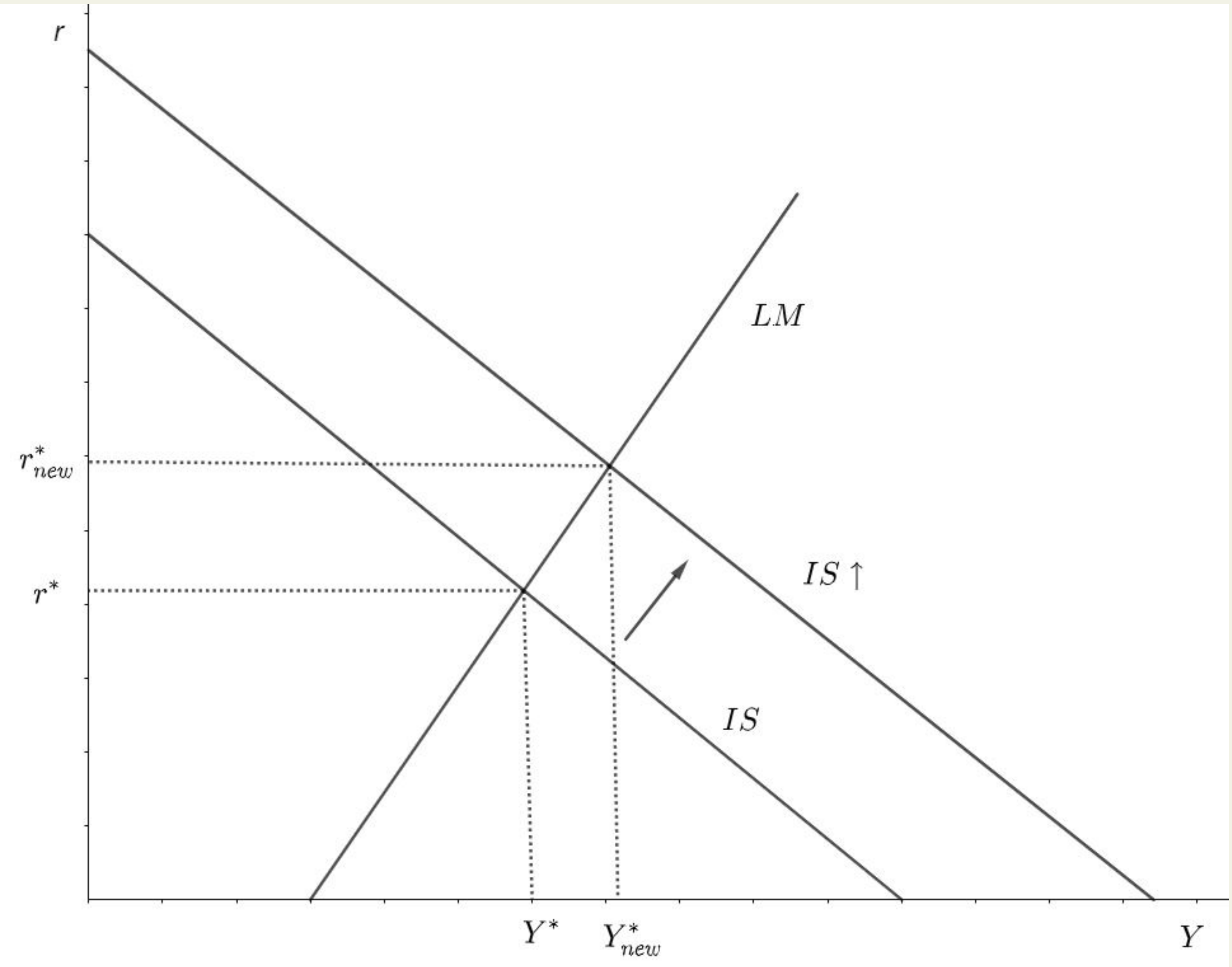


Рис. 146: Сдвиг IS на общем рынке

Точно также можно менять различные параметры модели, и смотреть, как это влияет на ставку процента. Например, предложение денег из-за сдерживающей или стимулирующей монетарной политики (M_s). Также сюда включена фискальная политика (G).

Мультипликация в модели IS-LM

Помимо всего прочего, в модель можно добавить различные мультипликационные эффекты из фискальной и монетарной политики. Вспомним, что денежная масса получается домножение базы на денежный мультипликатор:

$$\frac{M}{B} = \frac{cr+1}{cr+rr+er}$$

$$M = \frac{cr+1}{cr+rr+er} \cdot B$$

А также о том, что в фискальной политике мы можем использовать мультипликаторы из-за неавтономности потребления:

$$Y = \frac{1}{1-mpc} \cdot (C_a + I + G + Xn) - \frac{mpc}{1-mpc} \cdot T$$

Добавив их в модель, можно усложнить наши уравнения, чтобы они учитывали больше факторов и все эффекты мультипликации:

$$IS = Y = C + G + Xn + I_a - \gamma r = \frac{1}{1-mpc}\cdot(C_a + I_a - \gamma r + G + Xn) - \frac{mpc}{1-mpc}\cdot T$$

$$LM = Y = \frac{\frac{M}{P}+\beta r}{\alpha} = \frac{\frac{\frac{cr+1}{cr+rr+er}\cdot B}{P}+\beta r}{\alpha}$$

Если найти равновесие (приравняв уравнения IS и LM), то получим формулу равновесного ВВП и ставки, отражающие все эффекты фискальной и монетарной политики:

$$r^* = \frac{\alpha(\frac{1}{1-mpc}\cdot(C_a + I_a + G + Xn) - \frac{mpc}{1-mpc}\cdot T) - \frac{\frac{cr+1}{cr+rr+er}\cdot B}{P}}{\alpha\frac{1}{1-mpc}\gamma+\beta}$$

$$Y^* = \frac{\beta(\frac{1}{1-mpc}\cdot(C_a + I_a + G + Xn) - \frac{mpc}{1-mpc}\cdot T) + \frac{1}{1-mpc}\gamma\frac{\frac{cr+1}{cr+rr+er}\cdot B}{P}}{\alpha\frac{1}{1-mpc}\gamma+\beta}$$

Из этих уравнений можно увидеть, как изменение различных параметров повлияет на общее равновесие. Например, увеличение чистых налогов (T) приведет к снижению ВВП и ставки процента, а увеличение нормы обязательных резервов (rr) снизит равновесный ВВП, но увеличит ставку.

Модель AD-AS

Модель AD-AS (*Aggregated Demand Aggregated Supply*), используется для анализа шоков на совокупном рынке страны и анализа инфляции в краткосрочном и долгосрчоном периодах. Две основные перемнные модели – это реальный ВВП (Y) и уровень цен (P).

Модель состоит из трех графиков: Совокупного спроса (AD), Совокупного краткосрочного предложения ($SRAS$) и Совокупного долгосрочного предложения ($LRAS$). Разберем каждый из них по-отдельности.

Совокупный спрос

Совокупный спрос в экономике показывает, как равновесный объем реального спроса (реальный ВВП, Y) зависит от уровня цен в экономике (P). Данная зависимость всегда отрицательная, как у обычного спроса, так как при росте цен потребители предпочитают покупать меньше товаров (закон спроса). Уравнение совокупного спроса в общем виде выводится из модели IS-LM, которую мы обсуждали ранее. В общем виде совокупный спрос страны зависит от множества параметров (компонентов ВВП, чувствительности величин друг к другу, фискальной и монетарной политики), и выглядит следующим образом:

$$Y^*_{AD} = \frac{\beta(\frac{1}{1-mpc}\cdot(C_a + I_a + G + Xn) - \frac{mpc}{1-mpc}\cdot T) + \frac{1}{1-mpc}\gamma\frac{\frac{cr+1}{cr+rr+er}\cdot B}{P}}{\alpha\frac{1}{1-mpc}\gamma+\beta}$$

Однако, использование такого уравнение в задачах невозможно из-за его сложности, поэтому довольно часто уравнение совокупного спроса или задается изначально в задаче без оговорок про то, что на него влияет, или задачется исходя из **количественной теории денег**.

Количественная теория денег говорит о том, что все потраченные деньги в стране как раз в точности равны суммарной стоимости всех произведенных товаров и услуг. Общее потраченное количество денег можно обозначить как MV, где M – денежная масса, а V – скорость обращения денег (сколько раз в среднем каждый рубль был использован при торговле). Номинальный же ВВП можно записать как PY, где Y – реальный ВВП, а P – уровень цен в экономике. Приравняв две полученные величины, мы можем найти **уравнение количественной теории денег**:

$$MV = PY$$

Откуда, выразив Y, получим функцию совокупного спроса в экономике:

$$Y_{AD} = \frac{MV}{P}$$

Заметьте, что данная формулировка спроса довольно проста и содержит в себе лишь денежную массу как экзогенную переменную. Таким образом, функцию спроса, полученную с помощью количественной теории денег, можно встретить в задачах про монетарную политику.

Совокупное краткосрочное предложение

Краткосрочное предложение в экономике ($SRAS$) показывает зависимость совокупного предложения товара (Y) от уровня цен (P). Обычно для него выполняется закон предложения, то есть предлагаемое количество количество товара (Y) возрастает по цене, но довольно часто можно встретить задачи с горизонтальным предложением. Для начала отдельно разберем некоторые факторы, которые снижают влияние объема продаж на цену товара:

1) Издержки меню. Издержками меню называют любые издержки, связанные и изменением цены. Как вы можете догадаться, свое название они получили из-за необходимости перепечатывать меню в ресторане, чтобы обновить цены на блюда. Также в издержки меню записываются смена ценников, перенастройка кассы, изменение политики компании относительно уровня рентабельности.

2) Долгосрочные контракты с работниками. Большинство компаний заключает со своими сотрудниками трудовые договоры сроком на год. Соответственно, весь год зарплата сотрудников, которая составляет существенную долю расходов компании, не меняется, поэтому значительно снижаются стимулы к повышению цен.

3) Конкуренция на рынке. В отличие от теории, на практике довольно мало совершенно конкурентных рынков. Компании понимаются, что существуют в условиях конкуренции, и от их цен зависит объем спроса. Так что, резко изменив цены в краткосрочном периоде, можно потерять большое количество клиентов. В результате выясняется, что в краткосрочном периоде цены повышать совсем не выгодно.

Функция краткосрочного совокупного предложения в задачах может быть как задана изначально, так и выводиться из условий. Во втором случае вывод функции предложения напоминает обычную оптимизацию фирмы. Либо необходимо буцдет сложить предложение всех фирм в экономике, либо найти сразу же совокупное предложение во всей экономике.

Допустим, производственная функция всей экономики имеет вид $Y = 100\sqrt{L}$, где Y – реальный ВВП, а L – объем труда в экономике. Номинальная заработная плата (w) в стране равняется 1. Выведем из этого условия уравнение совокупного предложения:

$$\Pi = P \cdot Y - w \cdot L$$

$$\Pi = P \cdot 100\sqrt{L} - L \xrightarrow{\sqrt{L}} max$$

$$\sqrt{L^*} = \frac{100P}{2} = 50P$$

$$L^* = 2500P^2$$

$$Y^* = Y_{SRAS} = 100\sqrt{L} = 100 \cdot 50P = 5000P$$

Получили зависимость реального ВВП от уровня цен, то есть краткосрочное совокупное предложение. Таким же образом можно вывести функцию краткосрочного предложения из любого другого условия.

Совокупное долгосрочное предложение

Долгосрочное предложение ($LRAS$) показывает уровень ВВП страны в долгосрочном периоде. В экономической теории считается, в долгосрочном периоде, когда у фирм и у населения будет время для того, чтобы подстроиться ко всем эффектам и ценам, реальные величины не зависят от номинальных. Так, например, реальный ВВП не зависит от уровня цен и находится в своем оптимальном состоянии: на потенциальном уровне. Таким образом, долгосрочное предложение в экономике – это не что иное, как потенциальный ВВП страны ($Y_{LRAS} = Y^*$).

Собственно, модель

Нарисовав на одном графике все три прямые, мы можем получить полную картину:

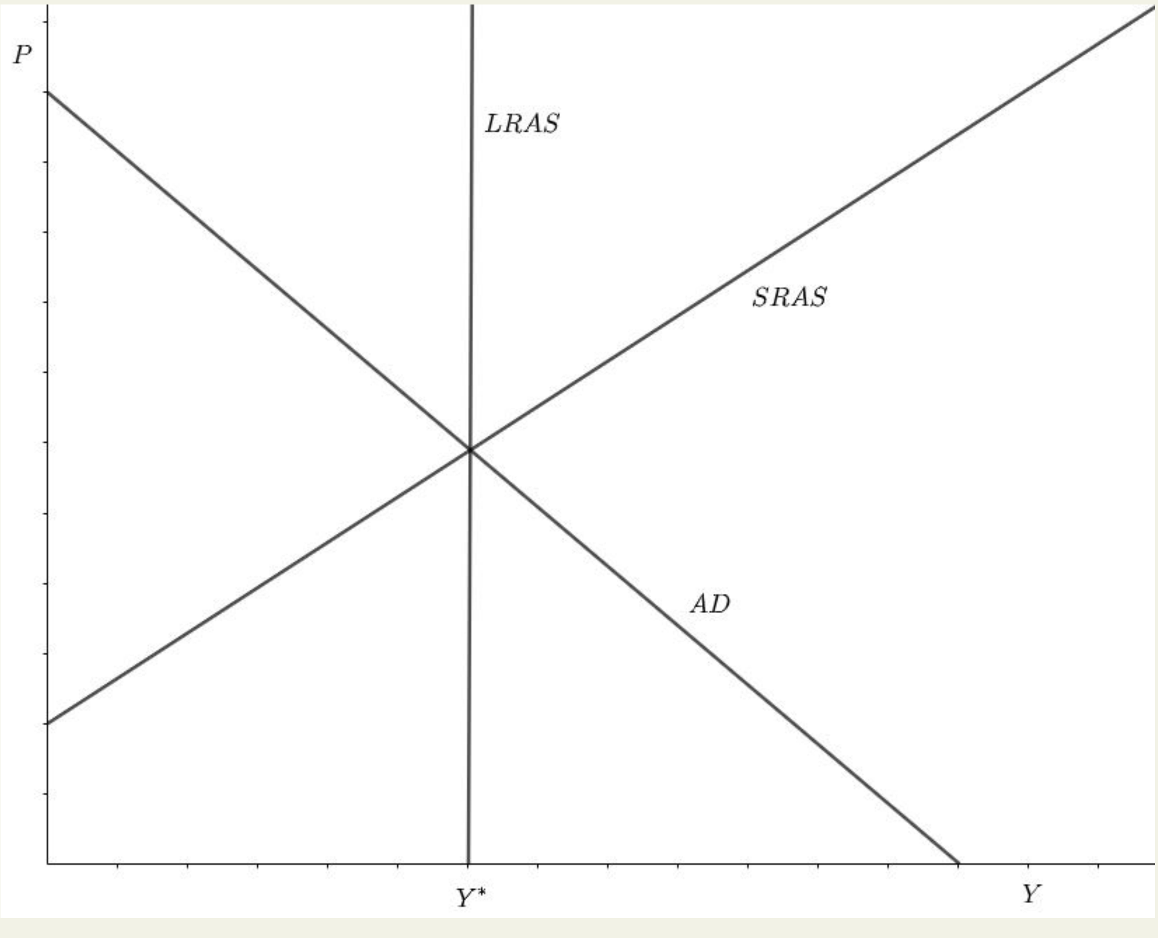


Рис. 147: Модель AD-AS

Здесь вы видите ситуацию **долгосрочного равновесия** на рынке. Оно образуется, когда все три прямые пересекаются в одной точке. При этом и уровень выпуска, и уровень цен оказываются стабильными.

Теперь самое время рассмотреть, что произойдет, если система дестабилизируется, то есть произойдет какой-либо шок.

Шоки в модели AD-AS

Краткосрочный шок предложения

Допустим, в стране случился неурожай, в результате чего краткосрочное предложение в стране снизилось:

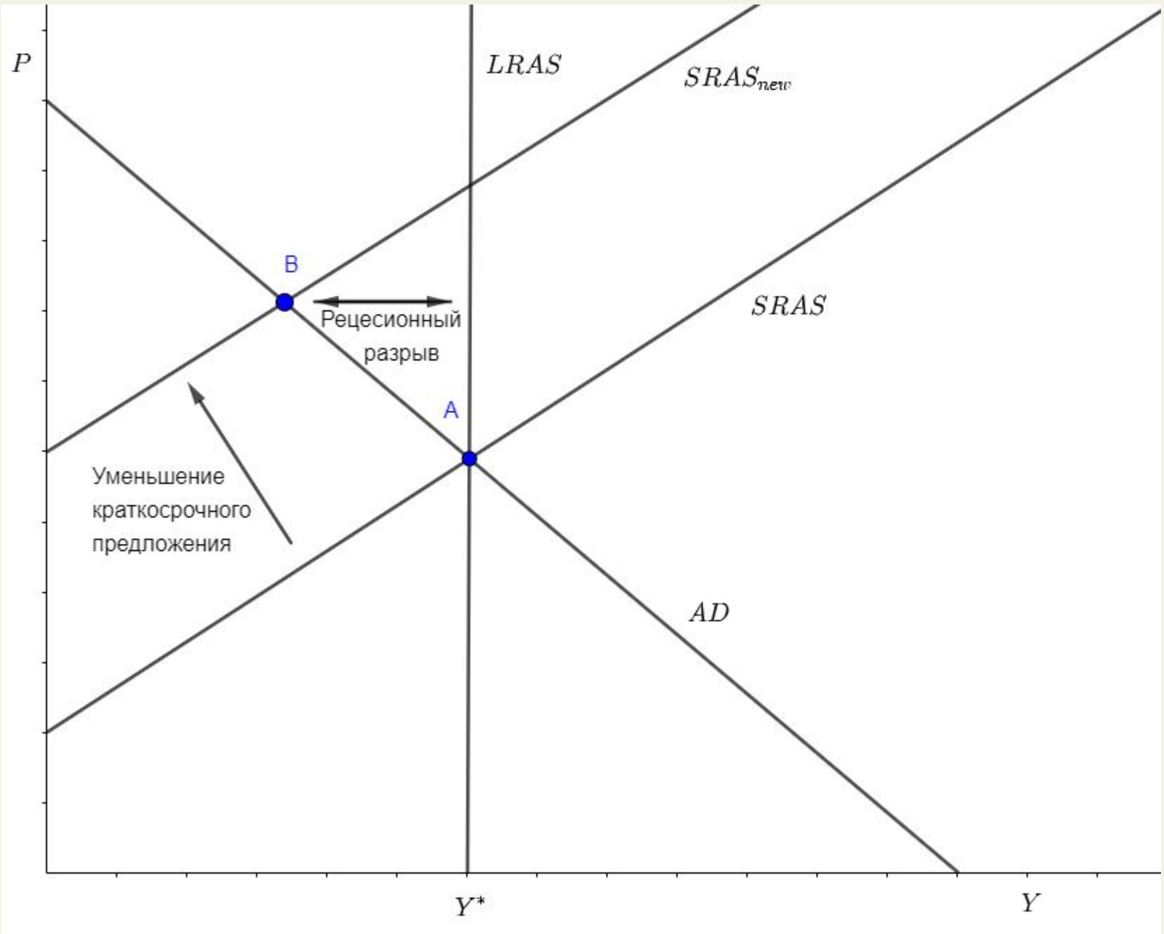


Рис. 148: Отрицательный шок предложения в модели AD-AS

Теперь в модели образуются два различных равновесия: долгосрочное (точка A) и краткосрочное (точка B), там, где спрос пересекает, соответственно, долгосрочное и краткосрочное равновесие. Как вы можете заметить, в краткосрочном равновесии уровень реального выпуска ниже потенциального ВВП, то есть образуется рецесионный разрыв. Рассмотрим, каким образом экономика в результате придет к долгосрочному равновесию.

При рецесионном разрыве образуется циклическая безработица (вспоминаем уравнение Оукена). В результате предложение труда в экономике увеличивается (люди готовы работать за меньшую зарплату). Это снижает издержки фирм, в реузльтате чего совокупное предложение начинает постепенно увеличиваться, пока рецесионный разры не устранится. Данный процесс изображен на следующем графике:

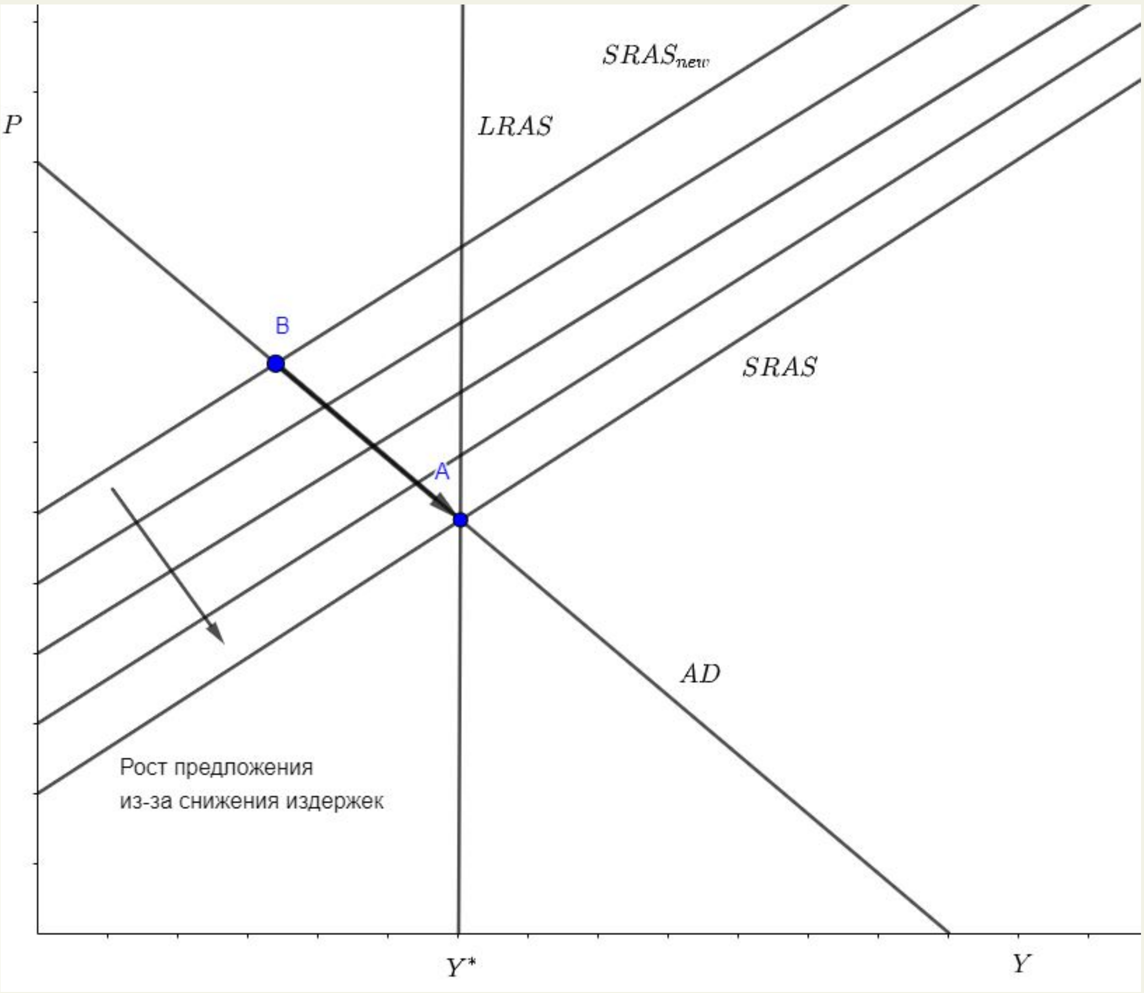


Рис. 149: Схождение к долгосрочному равновесию

Таким образом, в результате отрицательного шока предложения мы увидим сначала резкий рост цен, а затем дефляционные процессы: уровень цен постепенно вернется к первоначальному уровню из-за снизившихся издержек, и рецесионный разрыв исчезнет.

Краткосрочный шок совокупного спроса

Рассмотрим еще один шок в нашей модели. Например, ЦБ решил провести стимулирующую монетарную политику, в результате чего у населения и фирм стало больше денег и они увеличили свой спрос на товары:

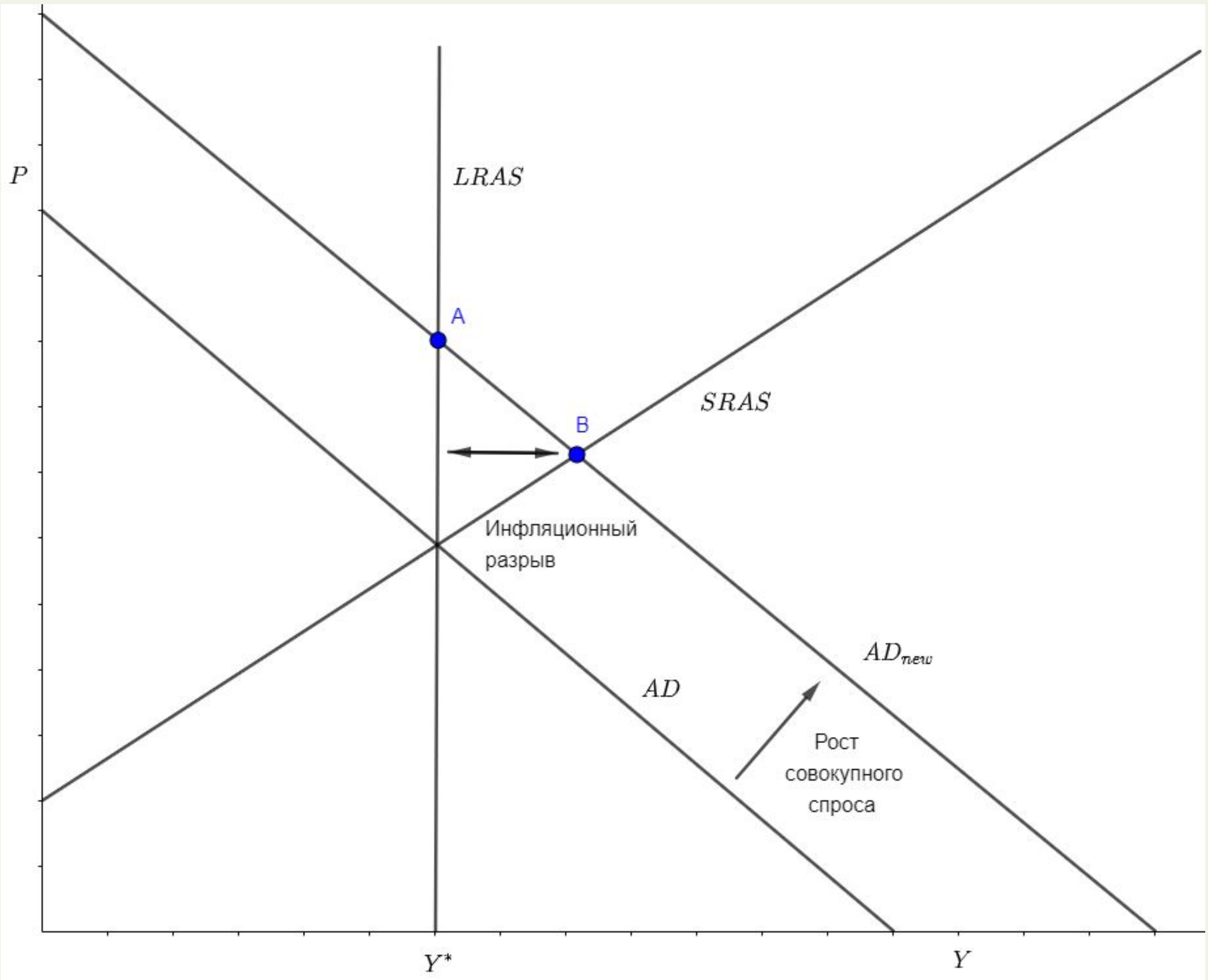


Рис. 150: Положительный шок совокупного спроса

В результате снова образуется два равновесия: долгосрочное (точка A) и краткосрочное (точка B). В результате в краткосрочном периоде ВВП оказывается выше потенциального, то есть образуется уже **инфляционный разрыв**. Свое название он получил из-за того, что такая ситуация в экономике приводит к росту инфляции: безработица опускается ниже естественного уровня, то есть нанимаются неэффективные работники, что повышает издержки фирм и приводит к снижению краткосрочного предложения.

Посмотрим на процесс подстройки предложения, в результате которого экономика приходит к долгосрочному равновесию:

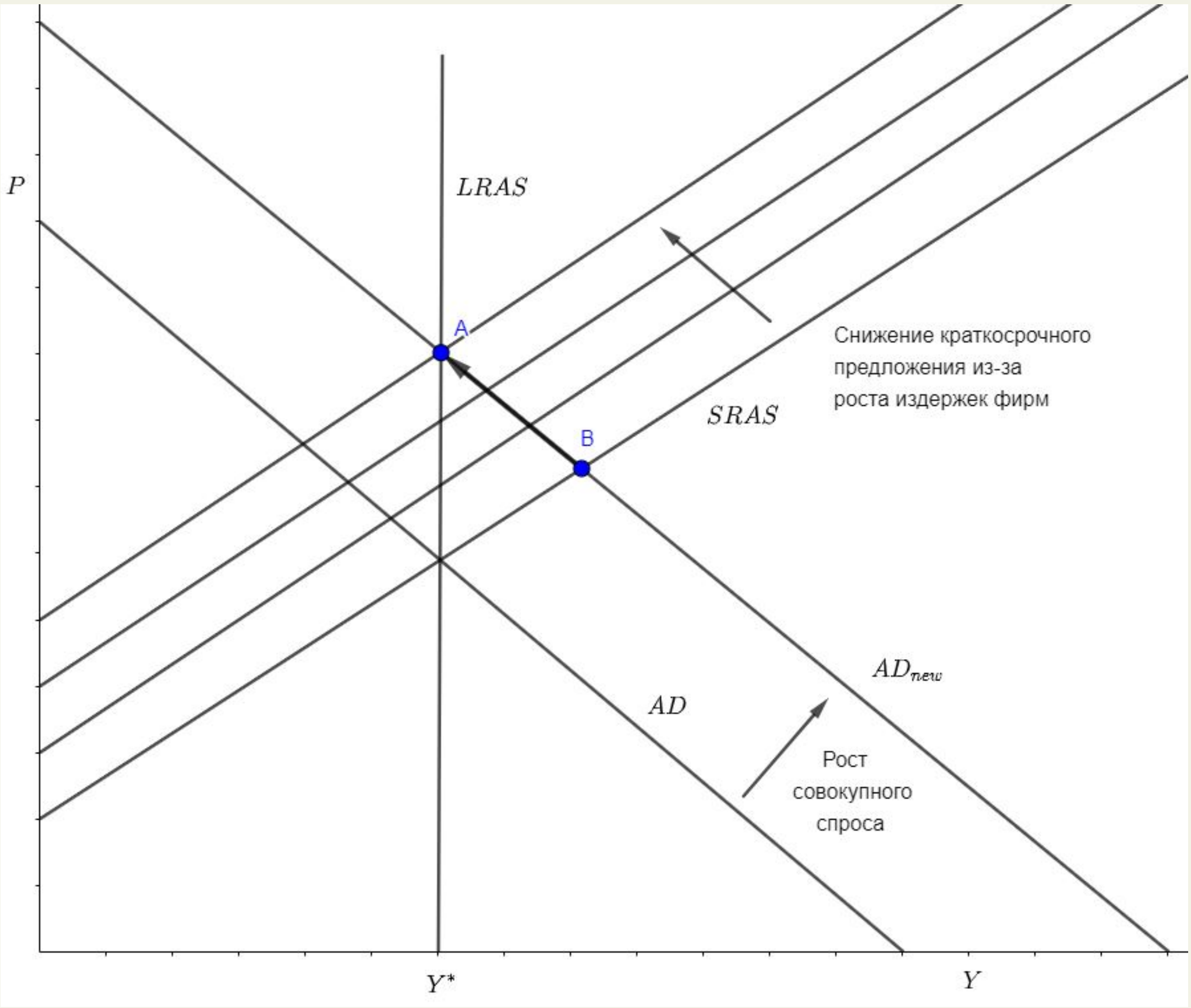


Рис. 151: Схождение к долгосрочному равновесию

Как мы можем видеть из модели, в краткосрочном периоде стимулирующая монетарная политика может повысить выпуск в экономике, но в долгосрочном периоде приводит лишь к увеличению инфляции.

Таким образом можно анализировать, как любой шок отразится на выруске и уровне цен в краткосрочном и долгосрочном периоде. У данной модели существует множество модификаций, однако, они обычно не рассматриваются в олимпиадной экономике, и будут описаны отдельно в задачах.