

Памятка по олимпиадной экономике

Здесь буду собраны краткие формулы из всех тем олимпиадной экономики, а также принципы и правила, которым ультра-мега-крайне стоит следовать при написании олимпиадных работ.

Дисклеймер: Все правила являются **общими**, и из них возможны исключения. Данная памятка позволит напомнить вам базовые правила и формулы, но существуют задачи, в которых данные формулы могут не выполняться

Содержание

1. Памятка по олимпиадной экономике	1
1.1 Общие правила написания олимпиад	1
1.2 Математические формулы и правила	2
1.3 Оптимизация	2
1.4 КПВ	3
1.5 Спрос, предложение, торговля, налоги	3
1.6 Эластичность	4
1.7 Издержки	5
1.8 Совершенно конкурентная фирма	5
1.9 Фирма-монополист	6
1.10 Олигополия	6
1.11 Рынок труда	7
1.12 Теория игр	7
1.13 Неравенство доходов	7
1.14 Финансы	8
1.15 Макроэкономика	8

1.1 Общие правила написания олимпиад

Не делайте несколько арифметических действий в уме. Каждое действие прописывайте.

Не пользуйтесь черновиками, только для рассуждений. Все решения и арифметические действия пишите сразу на чистовик. Зачеркнуть – не страшно. Если вы зачеркнули что-то, но хотите, чтобы это проверили, вы можете явно и крупными буквами прописать «прошу проверить зачеркнутое» и стрелочку на эту часть.

Объясняйте ваше решение словами: что в каждый конкретный момент в задаче вы делаете. Помните, ваша цель – не решить задачу, а показать, как именно вы ее решили.

Если вы подставляете переменную в уравнение, нарисуйте стрелочку, показывающую, что и куда вы подставили.

1.2 Математические формулы и правила

Если вы максимизируете любую функцию, вы должны указать, как выглядит ее график.

Если вы не знаете, как выглядит функция, то это покажет **вторая** производная: при $f'' < 0$ она вогнутая (ветвями вниз), при $f'' > 0$ – выпуклая (ветвями вверх).

Если $y = cx^n$, то $y' = cnx^{n-1}$.

$$(g \cdot f)' = g' \cdot f + f' \cdot g \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2} \quad y'(x) = \frac{1}{x'(y)} \quad f(g(x)) = f'(g) \cdot g'(x)$$

Суммы прогрессий

$$S_a = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_g = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_g^{\infty \downarrow} = \frac{b_1}{1 - q}$$

1.3 Оптимизация

При оптимизации функции с оптимумом в экстремуме (например, при максимизации параболы ветвями вниз) нужно придерживаться следующего алгоритма:

- Найти оптимальное значение всех переменных
- Проверить все ограничения на переменные (что они все больше 0, плюс дополнительные ограничения в задаче)
- Если какое-либо ограничение не выполняется, взять его как равенство и заново решить задачу.

При оптимизации функции с оптимумом на ограничении (например, при максимизации параболы ветвями вверх) нужно придерживаться следующего алгоритма:

- Определить максимальное и минимальное значение вашей переменной из всех ограничений в задаче
- Сравнить значение функции при максимальном и минимальном значении переменной

При оптимизации кусочной функции следует придерживаться следующего алгоритма:

- Каждый участок прооптимизировать на всех ограничениях, не переходя на другие участки (как будто вы его уже выбрали)
- Сравнить значения функции каждого участка между собой, чтобы понять, какой из участков нужно выбрать

1.4 КПВ

При построении КПВ его уравнение всегда получается из уравнения ограничения.

Альтернативные издержки товара равны наклону КПВ к оси этого товара.

$$A.I.(x) = -y'(x)$$

Нижняя огибающая по ограничениям – когда одновременно нужны несколько ограниченных ресурсов для производства товара.

Верхняя огибающая по ограничениям – когда выбираем лучший из нескольких вариантов.

Складываем КПВ когда одновременно доступно производство товаров из разных независимых ресурсов.

Абсолютное преимущество – ниже издержки производства товара или выше производительность.

Сравнительное преимущество – ниже A.I. производства товара.

Если страна обладает сравнительным преимуществом в производстве товара, при торговле она будет его экспортировать.

1.5 Спрос, предложение, торговля, налоги

Равновесие: $Q_d = Q_s$

При высоких ценах величина спроса становится равна 0, при низких – величина предложения.

Дефицит: $Def = Q_d - Q_s$ **Профицит:** $Prof = Q_s - Q_d$

Потоварный налог: $P_s = P_d - t$ $T = t \cdot Q$

Акцизный налог (в процентах от P_d): $P_s = P_d \cdot (1 - t)$ $T = t \cdot P_d \cdot Q$

НДС (в процентах от P_s): $P_s = \frac{P_d}{1+t}$ $T = t \cdot P_s \cdot Q$

$Ex = Q_s - Q_d$ $Im = Q_d - Q_s$

Натуральный налог:

Доля t от произведенного: $Q_s^{new} = (1 - t)Q_s((1 - t)P)$

Доля t от проданного: $Q_s^{new} = \frac{Q_s(\frac{P}{1+t})}{1 + t}$

Доля t от потребленного: $Q_s^{new} = (1 + t)Q_d((1 + t)P)$

$$\text{Доля } t \text{ от купленного: } Q_d^{new} = \frac{Q_d(\frac{P}{1-t})}{1-t}$$

Если P_w – мировая цена:

Потоварный общий налог на производителя: $P_s = P_d - t = P_w - t$

Потоварный экспортный налог на производителя (при наличии экспорта): $P_s = P_d = P_w - t$

Потоварный внутренний налог на производителя (работает только если запретить импорт): $P_s = P_d - t = P_w$

Потоварный импортный налог на потребителей (при наличии импорта): $P_s = P_d = P_w + t$

Влияние налогов на прибыль фирмы:

Потоварный налог: $\Pi = TR - TC - t \cdot Q$

Налог на выручку: $\Pi = (1 - t) \cdot TR - TC$

Налог на прибыль: $\Pi = (1 - t) \cdot (TR - TC)$ (не влияет на оптимизацию прибыли)

1.6 Эластичность

$$E_P^Q = \frac{\Delta Q\%}{\Delta P\%} = \frac{Q_1 - Q_0}{P_1 - P_0} \cdot \frac{P_0}{Q_0}$$

$$\text{Дуговая эластичность: } E_P^Q = \frac{Q_1 - Q_0}{P_1 - P_0} \cdot \frac{P_1 + P_0}{Q_1 + Q_0}$$

$$\text{Эластичность при работе с функциями: } E_P^Q = Q'_P \frac{P}{Q}$$

Формула постоянной эластичности: $E_P^Q = n \Leftrightarrow Q = c \cdot P^n$

$$E_P^{TR} = E_P^Q + 1 \quad E_P^Q = \frac{1}{E_Q^P}$$

Для линейных функций:

$$\text{Спрос: } E_P^Q = -\frac{P}{P_{max} - P} = -\frac{Q_{max} - Q}{Q}$$

$$\text{Предложение: } E_P^Q = \frac{P}{P - P_{min}} = \frac{Q - Q_{min}}{Q}$$

Классификация товаров:

$E_I^{Q_d} < 0$ – **инфериорный товар**

$0 < E_I^{Q_d} < 1$ – **товар первой необходимости, нормальный товар**

$1 < E_I^{Q_d}$ – **товар роскоши**, нормальный товар

$E_P^{Q_d} > 0$ – **товар Гиффена** (относится к инфериорным) или **товар Веблена** (относится к товарам роскоши)

Перекрестная эластичность:

$E_{P_y}^x > 0$ – **товары-субституты** (заменяющие)

$E_{P_y}^x < 0$ – **товары-комплементы** (дополняющие)

Индекс Лернера: $\frac{P - MC}{P} = -\frac{1}{E_P^{Q_d}}$ (равенство выполняется в классическом оптимуме монополиста и следует из $MR = MC$)

1.7 Издержки

$$TC = VC + FC \quad FC = TC(0) \quad VC(0) = 0$$

$$AC = \frac{TC}{Q} \quad AVC = \frac{VC}{Q} \quad AFC = \frac{FC}{Q} \quad AC = AVC + AFC$$

$$\Pi = TR - TC = (P - AC) \cdot Q = (P - AVC) \cdot Q - FC$$

$$AR = \frac{TR}{Q} = P \quad АП = \frac{\Pi}{Q} = P - AC$$

$$MC = TC'_Q = VC'_Q \quad MR = TR'_Q \quad МП = \Pi'_Q = MR - MC$$

$$\text{В дискретном случае: } MC(Q) = TC(Q) - TC(Q-1) \quad MR(Q) = TR(Q) - TR(Q-1)$$

$$TP_L = Q \quad AP_L = \frac{Q}{L} \quad MP_L = Q'_L$$

$$MC > AC \Leftrightarrow AC \uparrow \quad MC = AC \Leftrightarrow AC \sim \quad MC < AC \Leftrightarrow AC \downarrow$$

$$MC > AVC \Leftrightarrow AVC \uparrow \quad MC = AVC \Leftrightarrow AVC \sim \quad MC < AVC \Leftrightarrow AVC \downarrow$$

$$MP_L > AP_L \Leftrightarrow AP_L \uparrow \quad MP_L = AP_L \Leftrightarrow AP_L \sim \quad MP_L < AP_L \Leftrightarrow AP_L \downarrow$$

Предельная функция пересекает среднюю функцию в точке ее экстремума

$$TC_{\text{экономические}} = TC_{\text{явные/бухгалтерские}} + TC_{\text{неявные}}$$

$$\Pi_{\text{бухгалтерская}} = TR - TC_{\text{явные/бухгалтерские}}$$

$$\Pi_{\text{экономическая}} = \Pi_{\text{бухгалтерская}} - TC_{\text{неявные}} = TR - TC_{\text{экономические}}$$

1.8 Совершенно конкурентная фирма

$$MR = P = \text{const}$$

Канонический оптимум оптимум $P = MC$, если MC строго возрастают и TC непрерывна.

$$\text{Условие существования на рынке в } SR: P \geq AVC_{\min} \quad (\Pi \geq -FC)$$

$$\text{Условие существования на рынке в } LR: P \geq AC_{\min} \quad (\Pi \geq 0)$$

$$\text{В } LR\text{-равновесии } P = AC_{\min} \quad (\Pi = 0)$$

Результат максимизации прибыли – функция предложения

1..9 Фирма-монополист

$$MR < P \text{ при } Q > 0$$

Канонический оптимум $MR = MC$, если MC нестрого возрастают и TC и TR непрерывны.

Условие существования на рынке в SR : $\exists P : P \geq AVC$ ($\Pi \geq -FC$)

Условие существования на рынке в LR : $\exists P : P \geq AC$ ($\Pi \geq 0$)

Монополист всегда (без внешних вмешательств) работает на эластичном участке спроса.

Ценовая дискриминация 1 рода (абсолютная дискриминация): $MR = P$

Ценовая дискриминация 2 рода – дискриминация по объемам покупки

Ценовая дискриминация 3 рода – дискриминация по группам (решается в основном горизонтальным сложением MR).

1..10 Олигополия

Олигополия Курно (модель одновременного выбора количества):

- Максимизируем прибыль каждой фирмы при фиксированном выпуске другой фирмы
- Получаем линию реакции каждой фирмы
- Находим пересечение линий реакции

Олигополия Штаккельберга (модель последовательного выбора количества):

- Максимизируем прибыль последней фирмы
- Получаем линию реакции последней фирмы
- Подставляем ее в прибыль предпоследней фирмы и максимизируем уже ее, получая линию реакции, подставляем дальше, и так далее...
- В итоге максимизируем прибыль первой фирмы и получаем ответ

Олигополия Форхаймера (модель ценового лидера):

- Максимизируем прибыль фирм-последователей (прайстейкеров)
- Получаем их функцию предложения
- Вычитаем получившееся предложение из общего спроса, получая остаточный спрос
- На этом спросе ценовой лидер работает как монополист

Олигополия Бертрана (модель одновременного выбора цены): это вам не нужно

Олигополия Хотеллинга (модель линейного города):

- Находим координату безразличного покупателя
- Получаем, как она зависит от цен двух фирм
- Зная количество покупателей, максимизируем прибыль каждой фирмы при фиксированной цене конкурента, получая линии реакции
- Пересекаем линии реакции и находим ответ

1.11 Рынок труда

$$MRP_L = MR \cdot MP_L = TR'_L \quad MC_L = TC'_L$$

Канонический оптимум при **СК** на рынке труда : $MC_L = w = const \quad MRP_L = w$.

Канонический оптимум при **монопсонии** на рынке труда : $MRP_L = MC_L$.

1.12 Теория игр

Равновесие (по Нэшу) – ситуация, в которой ни одному игроку не выгодно поменять свою стратегию при фиксированных стратегиях других игроков

Эффективный исход (оптимум по Паретто) – ситуация, в которой нельзя увеличить выигрыш одного игрока, не уменьшив выигрыш другого. В общем виде – ситуация, которую нельзя улучшить.

Равновесия ищутся перебором или пересечением линий реакции.

Эффективные исходы ищутся перебором или максимизацией выигрыша одного при фиксированном выигрыше другого.

1.13 Неравенство доходов

Кривая Лоренса – функция $y(x)$, для каждого $0 \leq x \leq 1$ показывающая, какой совокупной долей дохода страны y обладает самая бедная часть населения x .

Коэффициент Джини $0 \leq G \leq 1$ – мера неравенства дохода в стране. Рассчитывается как отношение площади между кривой абсолютного равенства и кривой Лоренса к площади треугольника Лоренса.

Доход конкретного человека: $i = y'_x \cdot \frac{I}{N}$

Коэффициент Робин Гуда – максимальное расстояние по вертикали между кривой абсолютного равенства и кривой Лоренса

Не забывайте, что в задаче бедные могут стать богатыми, а богатые – бедными!

Формула отдельной кривой Лоренса для населения от a до b по оси x :

$$f^{new} = \frac{f(x(b-a) + a) - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

1.14 Финансы

$$PV = \frac{S}{(1+r)^n} \quad NPV - \text{сумма всех } PV \text{ проекта.}$$

При $NPV > 0$ проект выгодно реализовывать, при $NPV = 0$ безразлично, реализовывать или класть деньги в банк.

irr – **внутренняя норма** (среднегодовой) **доходности** проекта. Считается как ставка, при которой $NPV = 0$.

$NPV = 0$ от любого взаимодействия с банком.

Эффективная ставка (r_e) и **номинальная ставка** (r_n): $r_e = (1 + \frac{r_n}{n})^n - 1$.

Реальная ставка (r), **номинальная ставка** (i) и **инфляция** (π): $i = r + \pi + r \cdot \pi$

Формула платежа по аннуитетному кредиту: $X = \frac{r \cdot (1+r)^n \cdot S}{(1+r)^n - 1}$

Формула переплаты по дифференцированному кредиту: $P\% = \frac{r \cdot (n+1) \cdot S}{2}$

Облигация – ценная долговая бумага. Имеет номинал (стоимость выплаты), срок выплаты, купон (купон всегда в процентах от номинала, выплачивается каждый период, включая последний)

Акция – ценная бумага, право владения частью компании.

Колл-опцион – ценная бумага, дающая право на покупку актива по фиксированной цене

Пут-опцион – ценная бумага, дающая право на продажу актива по фиксированной цене

Фьючерс – контракт купли-продажи, который будет исполнен в будущем. Обычно применяется к договорам, заключающимися на бирже.

Форвард – любой контракт купли-продажи, который будет исполнен в будущем.

Своп-контракт – контракт обмена, в ходе которого стороны обмениваются между собой различными активами и договариваются через определенное время вернуть их друг другу

Дериватив – ценная бумага, которая ссылается на другой актив. К деривативам относят опционы, фьючерсы, форварды, свопы и их комбинации.

Экономический арбитраж – возможность получения мгновенной гарантированной прибыли

1.15 Макроэкономика

Номинальный ВВП (Y_n) – суммарная стоимость всех конечных товаров и услуг, произведенных на территории страны за год, $Y_n = \sum Q_1 \cdot P_1$

Реальный ВВП (Y_r) – ВВП, посчитанный в ценах базового года, $Y_r = \sum Q_1 \cdot P_0$

Дефлятор ВВП $Def = \frac{Y_n}{Y_r} = \frac{\sum Q_1 \cdot P_1}{\sum Q_1 \cdot P_0}$

ИПЦ $CPI = \frac{\sum Q_0 \cdot P_1}{\sum Q_0 \cdot P_0}$

Инфляция $\pi = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \cdot 100\% = \frac{Def_1}{Def_0} = \frac{CPI_1}{CPI_0}$, в зависимости от вопроса.

Индекс Фишера $FPI = \sqrt{CPI \cdot Def}$

Безработица $u = \frac{U}{U + E}$

Циклическая безработица $u_{\text{ц}}$ – безработица, связанная с экономическим циклом и обычно вызванная кризисом. Циклическая безработица может быть отрицательной, что обозначает перегрев экономики.

Естественная безработица u^* – нормальная безработица в долгосрочном равновесии.

Структурная безработица u_c – безработица, вызванная изменением структуры производства и технологическим прогрессом, подвид естественной безработицы.

Фрикционная безработица $u_{\text{ф}}$ – безработица, связанная с затратами времени на поиск работы, подвид естественной безработицы.

Рецессионный разрыв: $\frac{Y^* - Y}{Y^*}$

Уравнение Оукена: $\frac{Y^* - Y}{Y^*} = \beta \cdot u_{\text{ц}} = \beta \cdot (u - u^*)$

Чистый экспорт: $Xn = Ex - Im$

Уравнение ВВП по расходам: $Y = C + I + G + Xn$

Чистые налоги (T), налоговые сборы (Tx), трансферты (Tr): $T = Tx - Tr$

Располагаемый доход $Y_d = Y - T$

При неавтономном потреблении:

$$C = C_a + mpc(Y_d) = C_a + mpc(Y - T)$$

Мультипликатор госзакупок: $mult_G = \frac{1}{1 - mpc}$

Мультипликатор налогов: $mult_{Tx} = -\frac{mpc}{1 - mpc}$

Мультипликатор трансфертов: $mult_{Tr} = \frac{mpc}{1 - mpc}$

При неавтономном потреблении и подоходном налоге:

$$T = t \cdot Y$$

$$mult_G = \frac{1}{1 - mpc \cdot (1 - t)}$$

Сальдо государственного бюджета: $\Delta = Tr - Tx_G = T - G$

Мультипликатор сбалансированного бюджета всегда равен 1.

Монетарная политика:

$$M = C + D \quad B = C + R$$

$$cr = \frac{C}{D} \quad rr + er = \frac{R}{D}$$

Банковский мультипликатор $mult_b = \frac{1}{er + rr}$

Денежный мультипликатор $mult_m = \frac{M}{B} = \frac{cr + 1}{cr + rr + er}$

Структура сбережений:

$$S_f = IM - Ex = -Xn \quad S_g = T - G \quad S_p = Y - T - C$$

$$S_n = S_g + S_p \quad S = S_f + S_g + S_p = I$$

Уравнение платежного баланса: $S_n - I = Xn$

Реальный валютный курс: $RER = e \cdot \frac{P_d}{P_f}$

Уравнение количественной теории денег: $M \cdot V = P \cdot Y$